1.個位數四次方後依序爲 1，6，1，6，5，6，1，6，1，1

1+6+1+6+5+6+1+6+1+0→個位數爲 3

所求$198\times 3+1+6+1+6+5$→個位數爲 3

2. $\omega=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\Rightarrow\omega^6=1\Rightarrow\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^7+\omega^8=1+\omega+\omega^2$

3. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=101^2$

所求$2\times 3=6$ [(正負)(1，101，101^2)]

4. $2+\sqrt{3}$ 代入得 $(2+\sqrt{3})^2-9(2+\sqrt{3})\cos\theta+1=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{9}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{9}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$$

5. $\int_{-1}^{0}xe^{-x}dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_{-1}^{0}=-1-(e-e)=-1$ （令 $x=u$ ，$e^{-x}=v'$）

6. $f(x)=10^{\tan x}\Rightarrow f'(x)=\sec^2 x\cdot\ln 10\cdot 10^{\tan x}$

$\therefore f'(\frac{\pi}{4})=\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot\ln 10\cdot 10^{\tan\frac{\pi}{4}}=2\cdot\ln 10\cdot 10^1=20\ln 10$

7. $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x\Rightarrow\begin{cases}f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x\\ f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x$

$\therefore f(2)+f(4)=\frac{2}{2}-2+\frac{2}{4}-4=-\frac{9}{2}$

8.無限多解，所以$\Delta=\begin{vmatrix}3&3&-1\\4&-1&-3\\n&-4&-2\end{vmatrix}=10-10n=0\Rightarrow n=1$

$\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ，$\Delta_x=\begin{vmatrix}10&3&-1\\m&-1&-3\\-5&-4&-2\end{vmatrix}=-50+10m=0\Rightarrow m=5$

所以$m-n=5-1=4$

9.可翻轉 6 面，旋轉四面$\frac{6!}{6\times 4}=30$

10. $ab+c\Rightarrow$ (偶+奇)+(奇+偶)$=(1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5})\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{66}{125}$

11.(A) $64^{625}+1=(65-1)^{625}+1\equiv -1+1=0(\mathrm{mod}13)$

(B)由費馬小定理 $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 其中 a 不爲 p 的倍數，且 p 爲質數

$2^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}13)\Rightarrow 2^{1000}-3=(2^{12})^{83}\cdot 2^{4}-3\equiv 13\equiv 0(\mathrm{mod}13)$

(C) $67^{33}+5=(65+2)^{33}+5\equiv (2^{12})^{2}\cdot 2^{9}+5\equiv 512+5\equiv 10(\mathrm{mod}13)$

(D) $18^{50}+1=(13+5)^{50}+1\equiv (5^{12})^{4}\cdot 5^{2}+1\equiv 26\equiv 0(\mathrm{mod}13)$

故選(C)

12. $T(x,y)=(x,y-x,y)$

$T(1,0)=(1,-1,0)$ ，$T(0,1)=(0,1,1)$

$\dim(\mathrm{Im}\,age(T))=2$

13. $a_n=\dfrac{1000^{n}}{n\,!}$

(A) $a_1=1000$ (B) $a_{1000}=\dfrac{1000^{1000}}{1000!}>1000$

1000 項之後乘上真分數所以愈乘愈小即 $a_{1000}>a_{1001}>a_{1002}>\cdots>a_{1024}>\cdots>a_{2012}$

故選(B)

14. $\iint\limits_{R}\sqrt{x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\sqrt{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}d\theta=\frac{4\pi}{3}$

15. $\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$

16. $x-x^{9}$ →2-7,3-6,4-5 $\Rightarrow 2\times 3=6$ 種

$x^{2}-x^{8}$ →2-6,3-5,4-4 $\Rightarrow 2\times 2+1=5$ 種

$x^{3}-x^{7}$ →2-5,3-4 $\Rightarrow 2\times 2=4$ 種

$x^{4}-x^{6}$ →2-4,3-3 $\Rightarrow 2+1=3$ 種

$x^{5}-x^{5}$ →2-3 $\Rightarrow 2$ 種

所求 6+5+4+3+2=20

17. $(6\sqrt{3})^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}\tan 15^\circ=108-108(2-\sqrt{3})=108\sqrt{3}-108$

18. $x=\log_2 12$ ，$y=\log_3 12$

$xy-x-2y+3=(x-2)(y-1)+1=(\log_2 12-\log_2 4)(\log_3 12-\log_3 3)+1$

$=\log_2 3\cdot\log_3 4+1=2+1=3$

19.設 x 小時，$x+0.5+x=2\Rightarrow x=0.75$ 小時=45 分

∴13 點 50 分+45 分=14 點 35 分

20.行列式=特徵值乘積

$-1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\det A=-4\Rightarrow \lambda_2\lambda_3=4$

21. $\begin{cases}C_n^m : C_{n+1}^m=5:3\\ C_{n+1}^m : C_{n+2}^m=3:1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n+1 : m-n=5:3\\ n+2 : m-n-1=3:1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5m-8n=3\\ 3m-4n=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=7\\ n=4\end{cases}$

22. $\int_0^1\int_{2x}^2 e^{y^2}dydx = \int_0^2\int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2}dxdy = \int_0^2 [xe^{y^2}]_0^{\frac{y}{2}}dy = \int_0^2 \frac{y}{2}e^{y^2}dy = [\frac{e^{y^2}}{4}]_0^2 = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$

23. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \overset{令\sqrt{x}=u}{=} \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\cdot 2udu \overset{令u=\tan\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\cdot\sec^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^2\theta d\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta - 1 d\theta = 2[\tan\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(1 - \frac{\pi}{4}) = 2 - \frac{\pi}{2}$

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+2\frac{k}{n}+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = [-\frac{1}{x+1}]_0^1 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

25.令 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 AP=PB， $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{22} = PB^{22}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{22} & 0 \\ 0 & 1^{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^{22}+2 & -2^{23}+2 \\ 2^{22}-1 & 2^{23}-1 \end{bmatrix}$

所求 $-2^{22}+2-2^{23}+2+2^{23}-1 = -2^{22}+3$