臺北市立陽明高級中學 103 學年度教師甄選高中數學科筆試試題

一、 填充題：48% (共 8 題，每題 6 分)

1. 設向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$滿足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，且 $\vec{a}-\vec{c}$ 與 $\vec{b}-\vec{c}$ 的夾角為$\frac{\pi}{3}$，則 $|\vec{c}|$ 的最大值為_________。

2. 已知$0<\theta<\pi$，若方程式$x^2-4x\cos2\theta+2=0$的一個實根與方程式$2x^2+4x\sin2\theta+1=0$的一個實根互為倒數，則$\theta=$_________。

3. 已知函數 $f(x)=\sqrt{3}\,x-\sqrt{1-x^2}$ 在$x=\alpha$ 時有最小值m，則數對$(\alpha,m)=$ _______。

4. 若 $P(x,y)$ 與 $Q(m,n)$ 是關於直線 $y=2x-1$ 對稱的兩點，將 $Q(m,n)$ 繞原點旋轉 60^0，又得到 $R(X,Y)$。假設將 P 變換到 R 可用矩陣 $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ 表示，則矩陣 $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=$ __________。

5. 已知二階方陣$A=\begin{bmatrix}1&a\\b&1\end{bmatrix}$的反方陣「**不**」存在，且$A+A^2+\cdots+A^n=kA$，其中 n 為正整數，k 為實數，求 $k=$ _________。(以 n 表示)

6. 已知橢圓$\Gamma:\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的兩頂點$A(2,0)$、$B(0,1)$，若直線$y=kx\,(k>0)$與直線$\overleftrightarrow{AB}$交於$P$，與橢圓$\Gamma$交於$E$、$F$兩點，則四邊形$AEBF$面積的最大值為 ___________。

7. 已知函數$f(x)=|\cos x|$的圖像與直線$y=kx$ $(k>0)$ 恰有兩個交點，其中交點的橫坐標的最大值為α，求$\frac{\sin\alpha}{\cos3\alpha-\cos\alpha}=$ ____________(以α表示)。

8. 已知$P(x,y)$ 在曲線$x^2+2xy-3y^2=2$上，求x^2+y^2 的最小值為 __________。

二、 計算證明題：52%

1. 請判斷下謝各小題是否正確，若正確者請說明，若為錯誤者請舉出一反例：

(1) 若 $f(x)>0$ 恆成立且 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x\to a} f(x)>0$。 (5%)

(2) 若 $g(x)$ 在 a 點連續，且 $g(a)=b$，$\lim_{u\to b} f(u)$ 存在，則 $\lim_{x\to a} f[g(x)]=f[\lim_{x\to a} g(x)]$。(5%)

(3) 若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 處不可微分，則則函數 $h(x)=f(x)\,g(x)$ 在 $x=a$ 處一定不可微分。 (5%)

2. 只由三個字母 a, b, c 所組成長度為 n 的字串在通訊管道上傳輸，要求在傳輸中不可以有兩個 a 連續出現在任一字串中。令 a_n 是長度為 n 的字串時，傳輸中的字串個數，則：

(1) 求 a_1、a_2、a_3 之值。 (3%)

(2) 寫出 a_n 的遞迴式。 (3%)

(3) 求 a_n 的一般式 (4%)

3. 已知實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x^2)=f(x+1)\,f(x-1)$，證明方程式 $f(x)=0$ 無實根。 (9%)

4. 設 a_1，a_2，… 是等差數列且 $a_1>1$，公差 $d>0$，

證明：對所有自然數 n，$\log_{a_n} a_{n+1} > \log_{a_{n+1}} a_{n+2}$。 (9%)

5. 設 P 為 ΔABC 內部一點，且是 ΔABC 的外心，

證明： $\sin 2A\,\overrightarrow{PA}+\sin 2B\,\overrightarrow{PB}+\sin 2C\,\overrightarrow{PC}=\vec{\mathbf{0}}$。 (9%)