

國立臺中教育大學 104 學年度教師專業碩士學位學程招生考試

數學試題

※請於答案卷作答

一、填充題（80%，每格5%）

1、若 $x^2 - 2x + a = 1$ 的兩根相等，則 $ax^2 - 3x = 35$ 兩根之積為_____。

2、設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $|ax + 1| \geq b$ 的解為 $x \leq -1$ 或 $x \geq 7$ ，則 $a^2 + b^2 =$ _____。

3、試求 $\log_{16}(\sqrt{21+6\sqrt{6}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}) =$ _____。

4、試求 $2^{\log x} \cdot x^{\log 2} - 3 \cdot x^{\log 2} - 2^{1+\log 2} + 4 = 0$ 的解為_____。

5、若 $x = \sum_{a=1}^{100} a^5$ ，則 x 除以 6 的餘數為_____。

6、試求 9^{99} 末兩位數字的乘積為_____。

7、在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A = \frac{4}{5}$ 、 $\cos B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，則 $\sin C$ 之值為_____。

8、 設 $|\vec{a}|=2$ ， $|\vec{b}|=1$ 且 $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{23}$ ，則 $|3\vec{a}+2\vec{b}|=$ _____。

9、 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，已知 $\overline{GA}=2$ 、 $\overline{GB}=3$ 、 $\overline{GC}=2$ ，則 $\overline{AB}=$ _____。

10、 設 $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ 、 $Q=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ 、 $R=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 且二階方陣 M 滿足 $PMQ=R$ ，則 $M=$ _____。

11、 試求 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij=$ _____。

12、 若將 $1\frac{1}{3}$ 、 $1\frac{7}{9}$ 、 $2\frac{2}{5}$ 等三個分數同時乘以一個分數，使其乘積皆為正整數。
請問，此三個分數所乘的分數最小為_____。

13、 有 A 、 B 、 C 、 D 四個數，兩兩配對可以配成六對。而此六對的平均數分別為 12、13、15、17、19、20，請問原來四個數的平均數為_____。

14、 已知二次函數 $y=(k-3)x^2-2\sqrt{2}x+(k-2)$ 圖形的開口向下，且與 x 軸只有一個交點，則 k 之值為_____。

15、 設 $\{a_n\}$ 為一等比數列，已知 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 4$ 、 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = -16$ ，則此等比數列的公比為_____。

16、 有一凸多邊形，已知其各內角的度數成一等差數列，且最小內角為 100° ，最大內角為 140° ，則此一凸多邊形的邊數為_____。

二、計算證明題（20%，請務必寫出計算或證明過程與結果）

1、 試證： $1 \times n + 3 \times (n-1) + 5 \times (n-2) + \cdots + (2n-1) \times 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。（8%）

2、 請問 $\log_2 5$ 是有理數還是無理數？並請證明之。（12%）