

新北市立高級中等學校 105 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

考生作答說明：

- 一、請先檢視答案卷(卡)准考證號碼、姓名是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。
- 二、本試題計有：選擇題 5 題，填充題 12 題，計算題 1 題。
- 三、選擇題請於答案卡上畫記；答案卡請使用黑色 2B 鉛筆畫記作答，禁止使用立可白塗改，以免無法判讀。
- 四、填充題、計算題請自行在答案卷上標註題號依序作答，填充題不用寫過程，計算題要寫出過程。
- 五、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
- 六、答案卷(卡)與試題卷須一起繳交，始可離開試場。

新北市立高級中等學校 105 學年度教師聯合甄選

數學科 試題

一、選擇題：20%，每題 4 分

1. 若 α 、 β 、 γ 都是銳角，且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 、 $\tan \beta = \frac{1}{5}$ 、 $\tan \gamma = \frac{1}{8}$ ，則 $\alpha + \beta + \gamma = ?$

- (A) $\frac{3\pi}{4}$
- (B) $\frac{\pi}{2}$
- (C) $\frac{\pi}{3}$
- (D) $\frac{\pi}{4}$

2. 不等式 $\sqrt{a^2 - x^2} < 2x + a$ ($a > 0$ 為一常數) 的解集合為何？

- (A) $(0, a]$
- (B) $(-a, a)$
- (C) $(-\infty, -\frac{4}{5}a) \cup (0, \infty)$
- (D) 空集合

3. 設 $\triangle ABC$ 是一個面積為 5 的直角三角形， $\angle B = 90^\circ$ ， D 、 E 分別在 \overline{BC} 、 \overline{AB} 上且 $\overline{BD} : \overline{DC} = 4 : 3$ ， $\overline{AE} : \overline{EB} = 2 : 5$ ，求 \overline{DE} 之最小值為何？

- (A) $\frac{20}{7}$
- (B) $\frac{12}{7}$
- (C) $\frac{16}{7}$
- (D) $\frac{18}{7}$

4. 若已知 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{11 + 2\sqrt{7}}{2}$ ， $x + y + z = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$ ，試求 $(x + y)(y + z)(z + x) + xyz$ 之值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$
- (B) $\frac{1}{5}$
- (C) $-\frac{1}{5}$
- (D) $-\frac{1}{4}$

5. 圓內接 $\triangle ABC$ 為正三角形，在劣弧 \widehat{BC} 上有一點 P 。若弦 \overline{AP} 與 \overline{BC} 交於點 D ，且 $\overline{BP} = 21$ 、 $\overline{PC} = 28$ ，則 $\overline{PD} = ?$
- (A) 14
(B) 13
(C) 12
(D) 11

二、填充題：72%，每題 6 分

1. 某個箱子中裝有紅、白、黃三種顏色的球，已知黃球的個數至多是白球個數的 $\frac{1}{2}$ ，且黃球的個數至少是紅球個數的 $\frac{1}{3}$ 。若箱子中白球與黃球的個數和不大於 104，則箱子中至多有 _____ 個紅球。
2. 令 $P = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times 6! \times 7! \times 8! \times 9! \times 10!$ ，請問 P 的因數有 _____ 個是完全平方數。
3. 從 $[0, 1]$ 中任取兩數 a, b ，並令 $c = a + b$ 。若 A, B, C 分別表示最接近 a, b, c 的整數，則 $A + B = C$ 的機率為 _____。
4. 某遊樂園有一些遊客要乘坐遊園火車，已知遊園火車車廂的座位數可以調整，但每節車廂最多只可乘坐 40 人，且遊樂園規定每節車廂乘坐的人數都要相同。如果每節車廂只乘坐 30 人，則有一人無法上車；如果減少一節車廂，則在調整座位後所有遊客正好能平均分到各節車廂。試問原來要乘坐遊園火車的遊客總共有 _____ 人。
5. 令 $M = \{-2, 0, 1\}$ 、 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。若規定函數 $f: M \rightarrow N$ 必須滿足對於每個 $x \in M$ ， $x + f(x) + xf(x)$ 均為奇數，則符合這種規定的函數 f 共有 _____ 個。
6. 有三個小圓 A, B, C 彼此外切，且均內切於大圓 O ；已知圓 B 與圓 C 的半徑相等，且圓 A 的半徑長為 2。若圓 A 恰通過大圓 O 的圓心，則圓 B 的半徑長為 _____。
7. 不等式 $\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$ 的解為 _____。
8. 已知 $y = \frac{105^x + 105^{-x}}{105}$ 與 $y = \frac{a}{105^x + 105^{-x}}$ 相交於兩點 A, B ，若 $\overline{AB} = 1$ ，求 $a =$ _____。
9. 某項工程，若由甲、乙兩家工程公司承包，需 $\frac{12}{5}$ 天完成，要付 180000 元；由乙、丙兩家工程公司承包，需 $\frac{15}{4}$ 天完成，要付 150000 元；若由甲、丙兩家工程公司承包，需 $\frac{20}{7}$ 天完成，要付 160000 元。現在若在工程必須在一週內完成的前提下，由一家工程公司獨自承包此工程，則由 _____ 工程公司承包最省錢。
10. 考慮方程式 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ ，若 a 是從 $[0, 3]$ 中任取一數， b 是從 $[0, 2]$ 中任取一數，則方程式有實數根的機率為 _____。

11. 若 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展開式為 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$ ，則 $a_0+a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{1998}$ 之值為 _____。
12. 設 $a < 0$ ，則方程式 $(a-1)(\sin 2x + \cos x) + (a+1)(\sin x - \cos 2x) = 0$ 在區間 $(-\pi, \pi)$ 內有 _____ 個解。

三、計算題：8%

1. 已知橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦點分別為 F_1 與 F_2 ，過焦點 F_1 的直線交橢圓於 B 、 D 兩點，過焦點 F_2 的直線交橢圓於 A 、 C 兩點，且 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ，垂足為點 P 。則四邊形 $ABCD$ 面積的最小值為 _____。