

國立中央大學附屬中壢高級中學 106 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試題目卷

請勿將題目攜出試場

一、填充題(每格 6 分，共 72 分) **注意：請將填充題依順序標題號書寫於作答卷第一頁**

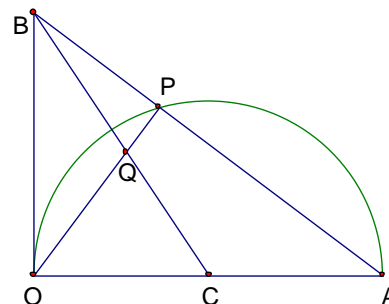
1. 設三階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & ka & pa^2 + qb \\ 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則 $k + p + q =$ _____。

2. 設 α 、 β 為方程式 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的兩根，求 $(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\beta + 1)(\beta + 2)(\alpha^3 + \beta^3) =$ _____。

3. 設 Z 為複數，滿足 $|Z| = 1$ ，且 $Z^5 + Z - 1 = 0$ ，則 $Z =$ _____。

4. 設無窮數列 $\sqrt{44-8}$ 、 $\sqrt{4444-88}$ 、 $\sqrt{444444-888}$ 、 \dots 的前 n 項之和為 $\frac{a}{27}[10^{n+1} + bn + c]$ ，則 $(a, b, c) =$ _____。

5. 如右圖， $\triangle OAB$ 中， $\overline{OB} = 3$ ， $\overline{OA} = 4$ ， $\overline{AB} = 5$ 。設以 \overline{OA} 為直徑， C 為圓心的圓與 \overline{AB} 交於 P ，且 \overline{OP} 與 \overline{BC} 交於 Q ，求 \overline{PQ} 長為_____。



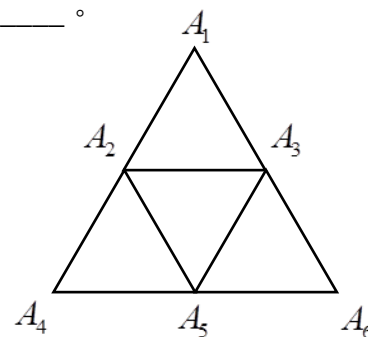
6. 已知 a 、 b 、 c 三數均為正整數，若 a 、 b 、 c 三數中的任意兩數的最小公倍數都是 m ，則稱 m 是 a 、 b 、 c 三數的「協和」公倍數，例如，30、4、60 三數中的任意兩數之最小公倍數都是 60，故稱 60 是 30、4、60 三數的「協和」公倍數。求滿足 36 是 a 、 b 、 c 三數的「協和」公倍數之序對 (a, b, c) 共有_____組解。

7. 設直線 L 與函數 $f(x) = x^3 + x + 1$ 交於 A 、 B 、 C 三點，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$ ，則直線 L 的方程式為_____。

8. 實數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，試求 $\sqrt{2}xy + yz$ 的最大值=_____。

9. 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $3\sqrt{15}$ ，其中兩條中線的長度為 3、6，求第三條中線的長度最大值為_____。

10. 一隻烏龜沿著右下圖的線段爬行（每線段都等長）。設烏龜在每線段中不改變爬行的方向，而在每個交點處選擇任一方向的機率相等，如：在 A_1 選擇 A_2 、 A_3 的機率各為 $\frac{1}{2}$ ，在 A_2 選擇 A_1 、 A_3 、 A_4 、 A_5 的機率各為 $\frac{1}{4}$ ，設烏龜爬行每一線段所需要的時間都是一分鐘，則烏龜從 A_1 爬到 A_6 所需時間的期望值為_____。



11. 設 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2016}$ 乘開後的個位數字為 a ，小數點後第一位數字為 b ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 聯立方程組
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases}$$
，求 $\sqrt{3}xz + yw$ 之值 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算證明題(共 28 分) 注意：請將計算證明題標題號書寫於作答卷第二頁起

1. 當 $\cos 2x \geq 0$ 時，求不等式 $\log_{0.5}(x^2 - 2x - 15) > \log_{0.25}(x + 13)^2$ 解的範圍。(8 分)

2. 設 O 為原點，拋物線 $y^2 = -x$ 與 $y = k(x + 1)$ 相交於 A, B 兩點

(1) 求證: $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ 。(5 分)

(2) 當 ΔOAB 面積為 $\sqrt{10}$ 時，求 k 之值。(5 分)

3. 設 x, y, z 為整數且 $x + y + z = 3$ ， $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ ，但 $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$ ，試求 $x^2 + y^2 + z^2$ 之值。(10 分)