

# 國立關西高級中學 108 學年度第 1 次教師甄選題目試卷

科 別 數學科試卷	卷 別 <input checked="" type="checkbox"/> 單面 <input type="checkbox"/> 雙面、共 2 頁
-----------	--

## 一、填充題(共 10 題，一題 6 分)

- 實數  $p, q$  滿足  $q \leq \frac{p^2}{4}$  試問當  $(p, q) =$  \_\_\_\_\_ 時， $|p-1| + |q-1|$  會有最小值。
- 複數數列  $\{z_n\}$  定義為  $z_1 = 3$ ， $z_{n+1} = (1 + \sqrt{3}i)z_n - \sqrt{3}i$  試求無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n+1} - z_n|}$  的值 = \_\_\_\_\_。
- 設隨機變數  $X$  的機率分布為二項分布  $B(n, p)$ ，令隨機變數  $Y$  的定義如下：  

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{若 } X \text{ 為偶數} \\ -1 & \text{若 } X \text{ 為奇數} \end{cases}$$
 試求  $Y$  的期望值 = \_\_\_\_\_。(以  $n, p$  表示)。
- 二元二次方程式  $y^2 + xy - 7x = 0$  的正整數解  $(x, y)$  為 \_\_\_\_\_。
- 將正整數  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  任意分成兩組，使得每組至少有一個數。則第一組數的和與第二組數的和相等的機率為 \_\_\_\_\_。
- 已知點  $A(3, 1)$ ， $B(\frac{5}{3}, 2)$  是平行四邊形  $ABCD$  的頂點，已知  $ABCD$  四個點都落在函數  $f(x) = \log_2 \frac{ax-b}{x-1}$  的圖形上，試求平行四邊形  $ABCD$  的面積 = \_\_\_\_\_。
- 已知拋物線的頂點在原點，焦點在  $x$  軸上， $\triangle ABC$  三個頂點都在拋物線上，且  $\triangle ABC$  的重心為拋物線的焦點  $F$ ，若  $BC$  邊所在的直線為  $4x + y - 20 = 0$ ，試求拋物線的方程式為 \_\_\_\_\_。
- 已知橢圓的兩個焦點為  $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ ，且直線  $L: y = x - \sqrt{3}$  為此橢圓的切線，試求此橢圓的方程式為 \_\_\_\_\_。

9. 已知  $a, b, c, d$  為實數，方程式  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  有 4 個虛根，其中 2 個根的積為  $13+i$ ，另 2 個根的和為  $3+4i$ ，試求  $b =$  \_\_\_\_\_。

10. 試求曲線  $y = \frac{1}{e^x}$  與  $y = -e^{x+1}$  的公切線  $L$  的方程式為 \_\_\_\_\_。

二、計算證明題：(共 2 題，一題 20 分)

1. 對於任意的自然數  $n$ ，定義函數  $f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 |x|, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$ ，

並令  $I_n = \int_{-1}^1 f_n(x) \cos x \, dx$ ，試回答下列問題：

(1) 請用  $n$  表示  $I_n$ 。(12 分)

(2) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  的值。(8 分)

2. 坐標平面上， $O$  為原點，函數  $f(x) = x^3 - 3x$  上一點  $P(a, a^3 - 3a)$ ，其中  $a > 1$ ，設過  $P$  斜率為  $k$  的直線為  $L$ ，試回答下列問題：

(1) 若直線  $L$  與  $f(x)$  的圖形共有 3 個相異交點，試問斜率  $k$  須滿足甚麼條件。(8 分)

(2) 當  $a = \sqrt{3}$  且  $k < 0$  時，設直線  $L$  與  $f(x)$  的圖形相交於  $P, Q, R$  三相異點，令  $S(k)$  表示  $\triangle OQR$  的面積，試求  $S(k)$  的最大值。(12 分)