

# 臺中市立文華高級中等學校 109 學年度第 1 次教師甄選 數學科專業知能試題本

測驗說明：

- 一、本測驗分成二大題：填充題(80 分)及計算題(20 分)。
- 二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。
- 三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。
- 四、另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。  
計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

## 一、填充題：(共 80 分)

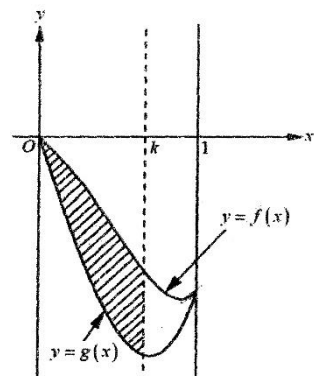
### I. 填充一(每格 4 分，共 32 分，全對才給分。)

1. 設雙曲線  $\Gamma_2$  與橢圓  $\Gamma_1: \frac{x^2}{33} + \frac{y^2}{49} = 1$  有相同焦點  $F_1, F_2$ ，若  $P$  為  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  的一交點，且  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ ，則雙曲線  $\Gamma_2$  的共軛軸長為\_\_\_\_\_。
2. 在複數平面上， $O$  為原點，點  $A(z_1)$ ， $B(z_2)$ ，已知  $|z_1 - 3 + 4i| = 1$  且  $\frac{z_2}{z_1} = 1 + \sqrt{3}i$ ，則  $\triangle OAB$  面積之最大值為\_\_\_\_\_。
3. 某汽車銷售公司對業務員的銷售獎金分配規定如下：業務員在一季(三個月)裡恰有一個月達成目標，可得獎金 2 萬元；如果有兩個月達成目標，可得獎金 5 萬元；如果三個月都達成目標，可得獎金 10 萬元；如果三個月都未達成目標，則沒有獎金；假設每位業務員每月達成目標的機率 0.2，每個月是否達成目標是互相獨立的事件，且業務員之間彼此互不影響。試求已知該公司有  $n$  名員工，且在一季裡，該公司至少有一人可以拿到獎金的機率超過 0.999，則  $n$  至少為\_\_\_\_\_。(已知  $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ )
4. 已知三次函數圖形的對稱中心為  $(-2, 5)$ ，且函數在  $x=1$  附近的局部圖形近似直線  $y=7x+1$ ，則此三次函數圖形為\_\_\_\_\_。
5. 已知  $x, y, z$  滿足  $x+y+z=1$ ， $x^2+y^2+z^2=3$ ， $x^3+y^3+z^3=5$ ，則  $x^4+y^4+z^4=_____$ 。
6. 三次實係數方程式  $x^3 + (1-a)x^2 + (a+5)x + 2a+5 = 0$  有兩正根，此方程式任兩根之和由小到大排列恰成等差數列，則  $a$  之值為\_\_\_\_\_。
7. 設  $f(x) \in R[x]$ ， $f(x+2)[1-f(x)] = 1+f(x)$ ，且  $f(1) = 1 - \sqrt{2}$ ，則  $f(1021) + f(2025) = _____$ 。

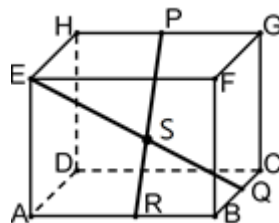
8. 在坐標平面上，從點  $A(0,0)$  走捷徑到點  $B(6,5)$ ，共轉三次彎的情形下，走法共有\_\_\_\_\_種。

## II. 填充二(每格 6 分，共 48 分，全對才給分)

9. 設  $f(x)$ 、 $g(x)$  皆為實係數多項式，當  $0 \leq x \leq 1$ ，恆有  $f(x) \geq g(x)$ ，設  $0 \leq k \leq 1$ ，右圖斜線區域  $R_k$  為  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  圖形與直線  $x = 0$ 、 $x = k$  所圍成的封閉圖形。已知  $R_k$  的面積為  $\frac{2}{5}k^5 - k^4 + k^2$ ，將  $R_k$  繞  $x$  軸旋轉所得旋轉體體積為  $(-\frac{4}{9}k^9 + k^8 + \frac{2}{3}k^6 - \frac{16}{5}k^5 + \frac{8}{3}k^3)\pi$ ，則多項式  $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



10. 右圖中  $ABCD-EFGH$  是一個長方體，已知  $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 2$ 。  
 $P$  為  $\overline{GH}$  的中點， $Q$  在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{BQ} : \overline{QC} = 2 : 1$ ， $R$  為  $\overline{AB}$  上一點，  
 若  $\overline{EQ}$  與  $\overline{PR}$  相交於一點  $S$ ，設  $\angle PSE = \theta$ ，則  $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



11. 一拋物線  $y^2 = 4x$  與一直線交於  $A$ 、 $B$  兩點，已知拋物線與直線所圍出來的面積為  $\frac{9}{8}$ ，則  $A$ 、 $B$  的中點軌跡方程式為\_\_\_\_\_。

12. 設  $f(x) = x^3 - kx^2 + 4k$ ，若  $f(x) = 0$  恰有兩相異負根與一正根，則實數  $k$  的範圍為\_\_\_\_\_。

13. 從 1~15 中選出三個數字為  $x, y, z$ ，滿足  $x \leq y \leq z$ ，則  $y - x > 2$  且  $z - y > 3$  的機率為\_\_\_\_\_。

14. 從  $n$  個不同物中任取  $r$  個排成一行，若含兩個特定物之排列數與不含此兩個特定物之排列數相等，且矩陣  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} r & n \\ r & n \end{bmatrix}$ ，則  $A^{30}B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 座標平面上，滿足聯立不等式  $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ x-y \leq 0 \\ x-y \geq -2 \end{cases}$  的可行解區域為  $S$ ，則區域  $S$  繞  $x$  軸旋轉一

圈所得立體之體積為\_\_\_\_\_。

16. 空間中， $O(0,0,0)$ 、 $A(3,1,-2)$ 、 $B(-1,1,4)$ 、 $C(2,3,1)$ ，若  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ，

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，且  $3 \leq x+y+z \leq 6$ ，則所有  $P$  點所成的圖形區域體積為\_\_\_\_\_。