

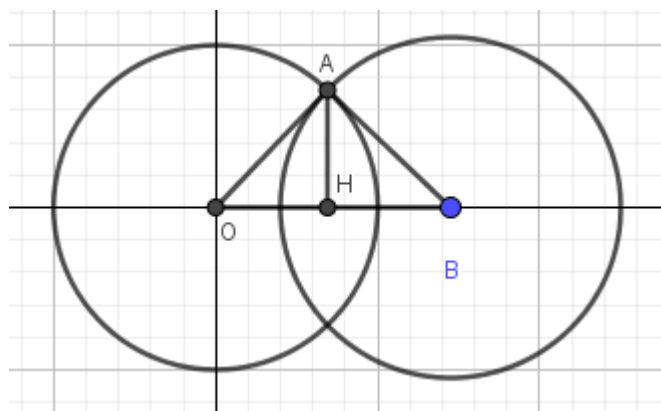
一、選填題甲(每題 6 分，共 60 分)

1. 已知 z 為複數且滿足 $|z|=1$ 、 $|z-1.45|=1.05$ ，求 z 的實部為_____。 【 $\frac{20}{29}$ 】

詳解:如圖， $\overline{OA}=1$ 、 $\overline{AB}=1.05$ 、 $\overline{OB}=1.45$

所以 z 的實部 $=\overline{OH}$

$$=\overline{OA} \cdot \cos \angle AOB = 1 \cdot \frac{1^2 + 1.45^2 - 1.05^2}{2 \cdot 1 \cdot 1.45} = \frac{20}{29}$$



2. 設 $P(x) = x^5 - x^2 + 1 = 0$ 的五個根為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ， $Q(x) = x^2 + 1$ ，則 $Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5) =$ _____。

解：由題意知 $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)$

$$\begin{aligned} \text{則 } & Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5) \\ &= (\alpha_1 + i)(\alpha_1 - i)(\alpha_2 + i)(\alpha_2 - i)(\alpha_3 + i)(\alpha_3 - i)(\alpha_4 + i)(\alpha_4 - i)(\alpha_5 + i)(\alpha_5 - i) \\ &= P(i)P(-i) = (i^5 - i^2 + 1)((-i)^5 - (-i) + 1) = 5 \end{aligned}$$

3. 設 $x \in \mathbb{R}$ 且滿足方程式 $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ ，則 $x =$ _____。

解：令 $u = (\frac{3}{2})^x$ ，可化簡 $\frac{u^3 + 1}{u + u^2} = \frac{7}{6}$ ，解得 $u = -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ ，可得 $x = -1, 1$

4. 設三次實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足 $2f(2) = 3f(3) = 4f(4)$ ，且 $f(4) = 1010$ ，求 $f(1) + f(5) =$ _____。

詳解:令 $m = 4f(4) = 4040$ ，可知 2, 3, 4 為方程式 $xf(x) - m = 0$ 的三根

所以可以設 $xf(x) - m = a(x-2)(x-3)(x-4)(x-k)$

$$\text{兩邊比較常數項可得 } -m = 24ak \Rightarrow -k = \frac{m}{24a}$$

$$\Rightarrow xf(x) - m = a(x-2)(x-3)(x-4)(x + \frac{m}{24a})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a(x-2)(x-3)(x-4)(x + \frac{m}{24a}) + m}{x}$$

$$\Rightarrow f(1) = (-6a)(1 + \frac{m}{24a}) + m = -6a + \frac{3m}{4}, \quad f(5) = \frac{(6a)(5 + \frac{m}{24a}) + m}{5} = 6a + \frac{m}{4}$$

$$\Rightarrow f(1) + f(5) = m = 4040$$

5. 當桌球比賽比分为 10:10 時，稱為 **deuce**，此後必須由兩人輪流各發一球，直到其中一名球員比對手多勝 2 分時比賽結束。依過去經驗知道，甲乙兩人比賽桌球，當甲發球時，甲得分機率為 $\frac{3}{5}$ ；當乙發球時，乙得分機率為 $\frac{3}{5}$ 。

今甲乙兩人比賽，目前比分为 10:10，接著輪到甲發球，假設各次得分为獨立事件，則從 **deuce** 發生後開始計算發球次數，到比賽結束時，兩人發球總次數的期望值为_____次。

解：設比賽結束前發球次數的期望值为 E ，再比賽第一分甲勝，第二分乙勝或第一分乙勝，第二分甲勝的機率為 $\frac{13}{25}$ ，此時比賽還需進行的發球次數的期望值为 E ，總場數的期望值 $E+2$

再比賽第一二分甲全勝，或乙全勝機率為 $\frac{12}{25}$ 則比賽恰進行兩場

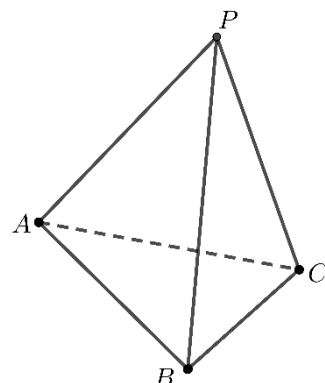
$$\text{故 } E = \frac{12}{25} \times 2 + \frac{13}{25} \times (E+2), \text{ 可求得 } E = \frac{25}{6}$$

6. 已知一四面體 $PABC$ 中， $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 60^\circ$ ，且 $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPA$ 的面積分別為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、2、1，則這個四面體 $PABC$ 的體積為_____。

$$\frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{解：令 } \overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC} \text{ 分別為 } a, b, c, \text{ 列式 } \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ = 2 \text{ 可解得 } a=1, b=2, c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{2}ca \sin 60^\circ = 1$$



在 $\overline{PB}, \overline{PC}$ 上取 $\overline{PB}'=1, \overline{PC}'=1$ ，則 $PAB'C'$ 為正四面體，其高為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\text{四面體 } PABC \text{ 體積為 } \frac{1}{3} \times \triangle PBC \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

7. 第一次段考某班全部學生的國文測驗成績平均為 54 分，標準差為 6 分；國文寫作成績平均為 16 分，標準差為 4 分，兩分數相加後所得總成績的標準差為 $2\sqrt{23}$ ，若國文寫作成績為 y ，國文寫測驗分數為 x ，則 y 對 x 的迴歸直線方程式_____。

$$\text{解：相加後標準差 } \sigma = \sqrt{92} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2r\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} = \sqrt{36 + 2r \times 6 \times 4 + 16}, r = \frac{5}{6}$$

$$\text{迴歸直線為 } y - 16 = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times (x - 54), y = \frac{10}{9}x - 44$$

8. 將兩個 a 和兩個 b 共四個字母填入如下圖所示的 16 個小方格內，每個小方格內至多填一個字母，若相同的字母必須不同行也不同意列，則共有_____種不同的填法。

$$\text{解：填 } a \text{ 方法 } \frac{C_1^{16} C_1^9}{2} = 72, \text{ 填 } b \text{ 方法 } \frac{C_1^{16} C_1^9}{2} = 72, \text{ 共有 } 72^2 \text{ 種}$$

不合：2 個 a 所在方格內都填 b 的情況有 72 種；2 個 a 所在方格內都僅有一個填 b 的情況有

$$C_1^{16} \times P_2^9 \text{ 種；符合題意有 } 72^2 - 72 - C_1^{16} \times P_2^9 = 3960。$$

9. 已知直線 $L: 6x - 5y - 28 = 0$ 交橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$, 且 a, b 皆為正整數) 於兩點 A 、 C ，且 $B(0, b)$ 為橢圓 Γ 的頂點。若 $\triangle ABC$ 的重心 G 恰為橢圓的右焦點 $F_2(c, 0)$ ，其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ，則橢圓 Γ 的正焦弦長為_____。

詳解: 設 $A(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ ，因為

$\triangle ABC$ 的重心 G 恰為橢圓的右焦點 $F_2(c, 0)$

所以 $x_1 + x_2 = 3c$ 、 $y_1 + y_2 = -b$

$$\text{又 } m_{AC} = m_L = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6}{5}$$

又 A, C 皆在橢圓上，可知

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

$$\text{兩式相減可得 } \frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-b^2}{a^2} = \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-b}{3c} \cdot \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 5bc$$

又 A, C 皆在直線 $L: 6x - 5y - 28 = 0$ 上

$$\text{所以 } 6x_1 - 5y_1 - 28 = 0$$

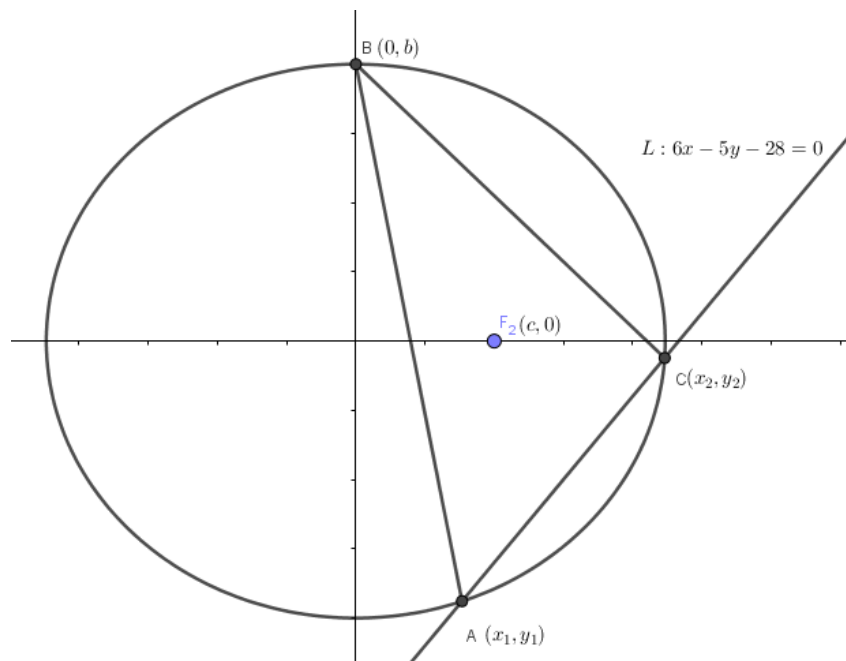
$$6x_2 - 5y_2 - 28 = 0$$

$$\text{兩式相加即得 } 6(x_1 + x_2) - 5(y_1 + y_2) - 56 = 0$$

$$\Rightarrow 6(3c) - 5(-b) - 56 = 0 \Rightarrow 18c + 5b = 56 \quad \#$$

$$\text{由 } \# \text{ 及 } a, b \text{ 為正整數} \Rightarrow c = 2, b = 4, a^2 = 20$$

$$\Rightarrow \text{橢圓 } \Gamma \text{ 的正焦弦長} = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{2\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$



10. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ，則 $\sin \angle BAC =$ _____。

詳解: 不失一般性，設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 $R = 2$

$$\text{又 } 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO} \quad "$$

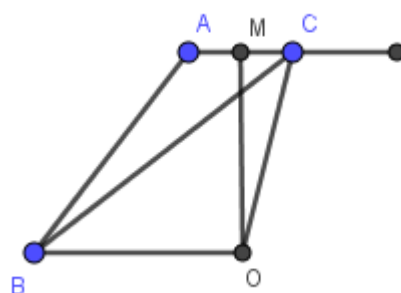
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

取 \overline{AC} 的中點 M ，則 $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ ，由" 得知 $\overline{OM} \perp \overline{OB}$

且 B 與 A 位於直線 \overline{OM} 的同側。

$$\cos \angle BOC = \cos(90^\circ + \angle MOC) = -\sin \angle MOC = -\frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} = \frac{-1}{4}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \cos \angle BOC} = \sqrt{4 + 4 + 8 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{10}$$



$$\Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\overline{BC}}{2R} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

選填題乙(每題 5 分)

11. 在空間中，有三個不共平面的非零向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} ，滿足 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) = 7$ ，求以三向量 $(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ 、 $(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ 、 $(\vec{b} + \vec{c})$ 所張成的平行六面體體積為_____。

詳解:因為 $\vec{p} \times (\vec{q} \times \vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{q} - (\vec{p} \cdot \vec{q})\vec{r}$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a})\vec{c} - ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c})\vec{a})$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a})\vec{c} - 0\vec{a})$$

$$= ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a})((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c}))$$

$$= (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$$

$$= (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \pm\sqrt{7}$$

$(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ 、 $(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ 、 $(\vec{b} + \vec{c})$ 所張成的平行六面體體積

$$= \left\| \begin{array}{c} 3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{b} + \vec{c} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{array} \right\| = 9\sqrt{7}$$

12. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $B = (I + A)^{-1}(I - A)$ ，求矩陣 $(I + B)^{-1} =$ _____。

詳解: $B = (I + A)^{-1}(I - A)$

$$\Rightarrow (I + A)B = I - A$$

$$\Rightarrow B + AB = I - A$$

$$\Rightarrow AB + A + B + I = 2I$$

$$\Rightarrow (I + A)(I + B) = 2I$$

$$\Rightarrow (I + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I + A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

13. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k, & k \in N \cup \{0\} \\ a_{2k+2} = a_k + a_{k+1}, & k \in N \cup \{0\} \end{cases}$$
，求 $\sum_{k=0}^{63} a_k =$ _____。

詳解： $\because a_{2k+1} = a_k \Rightarrow 1 = a_0 = a_1 = a_3 = a_7 = a_{15} = \dots = a_{2^n-1} \quad (n \in N)$

$$\text{令 } b_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n-1}$$

$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2^n-2}) + (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2^n-1})$$

$$= (a_0 + (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^{n-1}-2} + a_{2^{n-1}-1})) + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{n-1}-1})$$

$$= 3a_0 + 3a_1 + 3a_2 + \dots + 3a_{2^{n-1}-2} + 3a_{2^{n-1}-1} - a_{2^{n-1}-1}$$

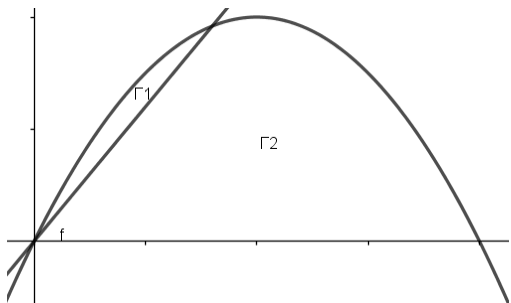
$$= 3b_{n-1} - 1 \Rightarrow b_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

$$b_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow b_2 = 3b_1 - 1 = 5 \Rightarrow b_3 = 3b_2 - 1 = 14 \Rightarrow b_4 = 3b_3 - 1 = 41 \Rightarrow b_5 = 3b_4 - 1 = 122$$

$$\sum_{k=0}^{63} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{62} + a_{63} = b_6 = 365$$

14. 設 Γ 是由 $y = 2x - x^2$ 與 x 軸所圍成的平面圖形，直線 $y = kx$ 將 Γ 分成兩部分(如下圖所示)，若 Γ_1 與 Γ_2 的面積分別為

S_1 與 S_2 ，且 $S_1 : S_2 = 1 : 7$ ，求 Γ_1 繞 y 軸旋轉一圈的旋轉體體積為_____。



解： $y = 2x - x^2$ 和 $y = kx$ 的交點為 $O(0,0)$ ， $A(2-k, k(2-k))$ ($0 < k < 2$)，於是

$$S_1 = \int_0^{2-k} (2x - x^2 - kx) dx = \frac{1}{6} (2-k)^3, \quad S_1 + S_2 = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}, \quad S_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} (2-k)^3$$

$$\text{因為 } S_1 : S_2 = 1 : 7, \text{ 所以 } \frac{4}{3} - \frac{1}{6} (2-k)^3 = 7 \times \left[\frac{1}{6} (2-k)^3 \right]$$

解得 $k = 1$ ，於是 $A(1,1)$

S_1 繞 y 軸旋轉一圈的旋轉體體積為

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (\pi \cdot 1^2) \cdot 1 - \pi \int_0^1 x^2 dy = \frac{\pi}{3} - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy \\ &= \frac{\pi}{3} - \pi \int_0^1 \left[1 - 2\sqrt{1-y} + 1 - y \right] dy = \frac{\pi}{3} - \pi \left[2y + \frac{4}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2 \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

15. 設 ΔABC 的三邊長分別為 a, b, c ，且 $a+b+c=12$ ，求 $\frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c}$ 的最小值為_____。

解：令 $a=x+y$ ， $b=y+z$ ， $c=z+x$

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c} = \frac{x+y}{2z} + \frac{4(y+z)}{2x} + \frac{9(z+x)}{2y} = \frac{x}{2z} + \frac{2z}{x} + \frac{y}{2z} + \frac{9z}{2y} + \frac{2y}{x} + \frac{9x}{2y}$$

$$\geq 2+3+6=11 (AM \geq GM)$$

最小值 11

16. 已知 ΔABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AB}=1$ ， $\overline{AC}=\sqrt{3}$ ，若 P 點在 ΔABC 內部且滿足 $\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \overrightarrow{0}$ ，

求序對 $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}) =$ _____。

解：由內積可知 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ ，即 P 點為三角形內費馬點

令 $\overline{PA}=x$ ， $\overline{PB}=y$ ， $\overline{PC}=z$ 利用餘弦定理

$$x^2 + y^2 + xy = 1 \dots (1)$$

可知 $y^2 + z^2 + yz = 4 \dots (2)$ ，又由三角形面積可得 $xy + yz + zx = 2$ ，代回可知 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

$$z^2 + x^2 + zx = 3 \dots (3)$$

(1)+(2)可得 $y(x+y+z)=2$ 同樣 $z(x+y+z)=4$ ， $x(x+y+z)=1$ ，可得 $x:y:z=1:2:4$

代入求得 $x = \frac{\sqrt{7}}{7}, y = \frac{2\sqrt{7}}{7}, z = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

17. 某電子玩具按下按鈕後，只會出現紅球或白球。若某次出現為紅球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ ；若某次出現為白球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{2}{5}$ 。已知第一次按下按鈕後出現紅球和白球的機率相等，求第 n 次按下按鈕後出現紅球的機率為_____。

解：利用轉移矩陣或者是數列遞迴式設第 n 次按下按鈕出現紅球的機率為 P_n ，根據題意可知 $P_1 = \frac{1}{2}$ ，當 $n \geq 2$ 時，

$$P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{3}{5}(1-P_{n-1})，即 P_n = -\frac{4}{15}P_{n-1} + \frac{3}{5}，構造 P_n - \frac{9}{19} = -\frac{4}{15}(P_{n-1} - \frac{9}{19})$$

$$可知 P_n = \frac{1}{38}(-\frac{4}{15})^{n-1} + \frac{9}{19}$$

18. 設 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ ，求 $\cos \alpha$ 的最大值為_____。

詳解：由題意得知 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha + \cos \beta$

$$\Rightarrow (\cos \alpha - 1) \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha = 0$$

設點 $P(\cos \beta, \sin \beta)$ ，直線 $L: (\cos \alpha - 1)x - (\sin \alpha)y - \cos \alpha = 0$

所以 P 在 $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ 上，也在直線 L 上

因此圓心 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離小於或等於半徑

$$\text{即} \left| \frac{-\cos \alpha}{\sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + (-\sin \alpha)^2}} \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha \leq 2 - 2 \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\cos \alpha - 1)^2 \leq 3$$

$$\text{所以 } -1 \leq \cos \alpha \leq \sqrt{3} - 1$$