

國立中興大學附屬高級中學

109 學年度第 1 次教師甄選筆試題目卷

說明：1. 填充題須在答案卷中標明題號並依原題目之順序作答，不須計算過程，全對才給分；並分式需化為最簡分式，根式需有理化，否則不予計分。

2. 計算題須在答案卷中標明題號並作答，且須詳列計算過程，否則不予計分。

一、填充題(共 92 分，1~8 題每題 4 分，9~20 題每題 5 分)

1. 計算 $C_0^{2020} - C_2^{2020} + C_4^{2020} - C_6^{2020} + \dots - C_{2018}^{2020} + C_{2020}^{2020}$ 之值為_____ (以指數表示)。

2. 對於無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ ，若 $\langle a_n \rangle$ 的相鄰兩項 a_n 與 a_{n+1} 是方程式 $x^2 - b_n x + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ 之兩根，對所有自然數 n 皆成立，

且 $a_1 = 1$ ，則 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k =$ _____。

3. 求 $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}}$ 的值為_____。

4. 已知 k 為整數，在坐標平面上，直線 $L: (k+2)x + (k^2 - 2k - 19)y = k - 9$ 的圖形，不通過第四象限也不通過原點，則滿足以上條件的 k 有_____個。

5. 平行四邊形 $ABCD$ 中，設 $A(1, 5)$ ， $B(2, 1)$ ，若直線 $AC: 3x - y + 2 = 0$ 會平分 $\angle BAD$ ，則 C 點坐標為_____。

6. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ，其中 $n \geq 3$ 。已知 $a_{42} = 3$ ， $a_{28} = 5$ ，則 $a_{14} =$ _____。

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}。$

8. 已知 a 與 b 為實數， n 為正整數，設函數 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 5}{x^{2n} + 2}$ ，若對所有實數 x ， $f(x)$ 為連續函數，則有序對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}。$

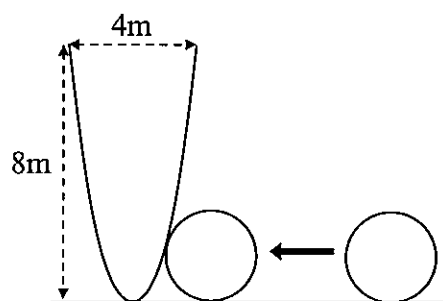
9. 設 a, b, c 為實數，若 $|1-a| = |a-b| = |b-c| = |c-9| = 4$ ，則滿足條件的有序組 (a, b, c) 有 組。

10. 設 a 與 b 為實數，已知方程式 $x^3 - 3x^2 + 3ax - b = 0$ 有三個正實根，若 a 的最大值為 α ， b 的最大值為 β ，則有序對 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{2cm}}。$

11. 設 a 為實數，若過點 $P(3, a)$ 可對曲線 $f(x) = x^3 - 12x - 20$ 作出三條切線，則 a 值的範圍為 。

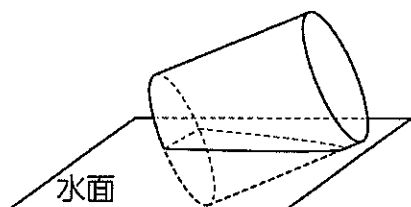
12. $\frac{|2x+3y+4|}{9} + \frac{|3x-7y-5|}{4} = 1$ 所圍區域的面積為 。

13. 如右圖，在一水平地面上有一拋物線形的柱子，其頂點與地面相切，柱子高為 8 公尺，最頂部的寬為 4 公尺，今在地面上有一顆直徑為 2 公尺的球滾向此柱子並且撞擊到柱子，則撞擊點距離地面的高度為_____公尺。

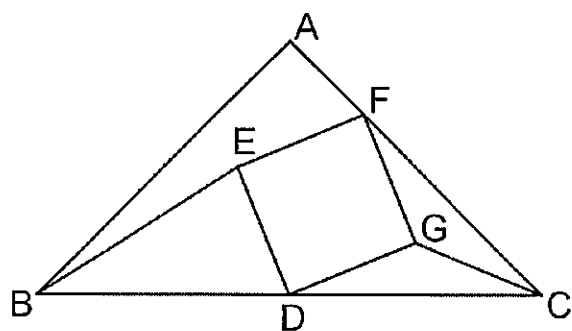


14. 在複數平面上， $\text{Arg}(z)$ 表 z 之主幅角， i 表示虛數單位 $\sqrt{-1}$ ，若 $\text{Arg}\left(\frac{z-2-3i}{z+2+3i}\right) = \frac{\pi}{2}$ ，則 $|z|$ 之值為_____。

15. 有一底面半徑為 3 公分，且密度不均勻的圓柱體，傾斜漂浮在靜止的水面上，水面剛好通過底面直徑且與底面成 60° 角，如下圖所示。試求此圓柱體在水面下的體積為_____立方公分。



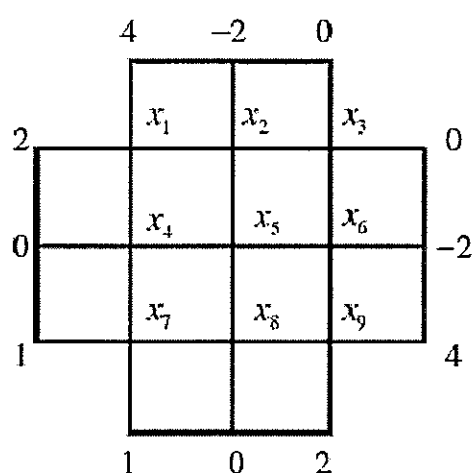
16. 如下圖，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， D 為 \overline{BC} 的中點，四邊形 $DEFG$ 為正方形，且 F 在 \overline{AC} 邊上，若 $\overline{BE} = \sqrt{3} \overline{CG}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則正方形 $DEFG$ 的面積為_____。



17. 坐標平面上，由 $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ ， $y + 1 \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x$ ， $y + 1 \geq -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x$ 所圍成之圖形面積為_____。

18. 設 $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{64}{9} \left(\frac{x}{x^2 - x + 2} \right)$ ， $x > 0$ ，求函數 $f(x)$ 之最小值為_____。

19. 如下圖所示，在一個缺角棋盤的各水平線和鉛垂線的交會點上，分別標示數字，其中的 x_1, x_2, \dots, x_9 等為未知數字。今假設每一個 x_i 恰為其相鄰的四個數字的平均數，例如 $x_1 = \frac{1}{4}(4 + 2 + x_2 + x_4)$ ， $x_5 = \frac{1}{4}(x_2 + x_4 + x_6 + x_8)$ ，試求 x_5 之值為_____。



20. 實數 x, y, z 滿足方程式 $\begin{cases} x + y + z = -3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \\ x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) = -24 \end{cases}$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2 =$ _____。

二、計算題(共 8 分，每題 8 分)

1. 已知 $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ， $0 < c < 1$ ， $0 < d < 1$ ，且 $a + b + c + d = 1$ ，求 $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right)$ 之最小值。