國立臺南女中 110 學年度第一次教師甄選試題卷(數學科)

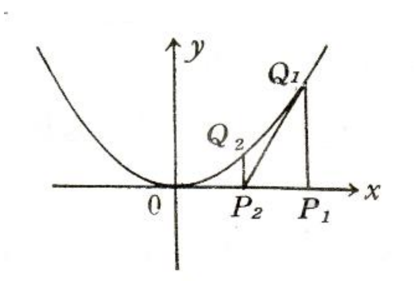
說明：

1. 本試題共 5 頁，皆單面印刷。作答時請註明題號，否則不予計分。填充題請依序作答。
2. 所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分。

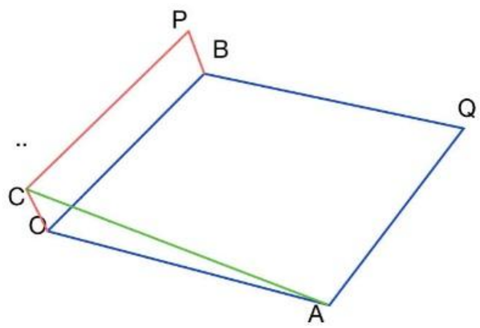
一、填充題（共 22 題，每題 3 分，合計 66 分）

1. 設 k 是正整數，當 $\frac{k^2}{1.1025^k}$ 有最大值時，$k=$________。

2. 自 $P_1(1,0)$ 作 x 軸的垂直線交拋物線 $y=x^2$ 於 $Q_1(1,1)$，再由 Q_1 作此拋物線的切線交 x 軸於 P_2，又自 P_2 作 x 軸的垂線交此拋物線於 Q_2，如此依序進行，試求級數 $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots\cdots+\overline{P_nQ_n}+\cdots\cdots$ 之和=___________。



3. 如圖(示意)，平面上平行四邊形 OAQB 面積為 40，平行四邊形 OBPC 面積為 12，ΔOAC 面積為 18，若 $\overrightarrow{OB}=a\overrightarrow{OA}+c\overrightarrow{OC}$，$a$，$c$ 為正實數，則數對(a,c)=______。

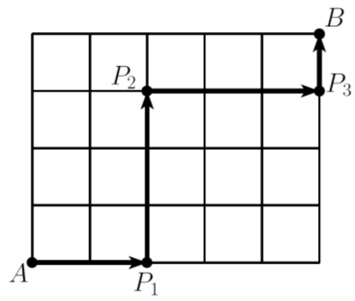


4. 2011 個數字 $\frac{1}{11^2},\frac{1}{12^2},\ldots,\frac{1}{2021^2}$，分別以數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{2011}$ 表示，並進行下列操作：
(1) 令 $b_1=f(a_1,a_2)=\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}-\frac{1}{11^2}\times\frac{1}{12^2}$ 將 a_1,a_2 刪去，再加入 b_1，變成新的 2010 個數字 $b_1,a_3,\ldots,a_{2011}$；
(2) 令 $b_2=f(b_1,a_3)=b_1+\frac{1}{13^2}-b_1\times\frac{1}{13^2}$, 將 b_1,a_3 刪去，再加入 b_2，變成新的 2009 個數字 $b_2,a_4,\ldots,a_{2011}$；
(3) 類似上面的步驟，將 b_k,a_{k+2} 刪去，再加入 b_{k+1}，變成新的數字 $b_{k+1},a_{k+3}\ \ldots,a_{2011}$。
最後可得數字 b_{2010}，求 b_{2010}=___________。

5. 已知 $7x-\frac{1}{y}=16$ 且 $xy+\frac{1}{xy}=30$，試求 $2xy-20x+9$ 的值為_________。

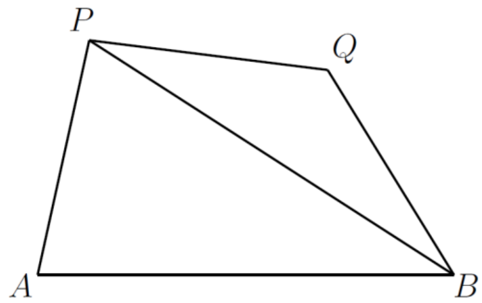
6. 已知對於所有正整數n，數列$\langle r_n \rangle$的相鄰兩項r_n及r_{n+1}為二次方程式$x^2-a_nx+\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$的兩根，且$r_1=2$。求$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的值為__________。

7. 在右圖的棋盤街道中，從A走捷徑(只能向右或向上走的路徑)到B。定義「轉向次數」為捷徑中改變方向的次數，例如右圖的捷徑$A\to P_1\to P_2\to P_3\to B$的轉向次數為 3。現在從所有$A$到$B$的捷徑中任選一條，假設每條捷徑被選到的機會均等，求轉向次數的期望值為__________。

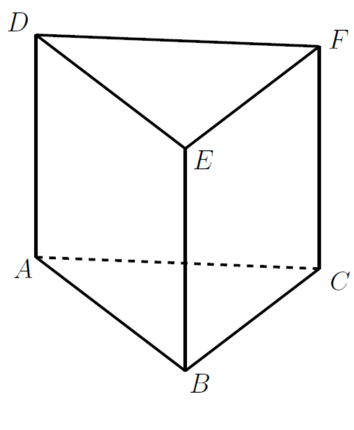


8. 已知複數z_1,z_2滿足$|z_1|=2,|z_2|=3$且$3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-i$，其中$i=\sqrt{-1}$，求z_1z_2的值為__________。

9. 在平面上有四個點A,B,P,Q，其中A,B為定點且$\overline{AB}=\sqrt{3}$，P,Q為動點且$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=1$，如右圖(此為示意圖)。令三角形$APB$與三角形$BPQ$的面積分別為$S$與$T$，求$S^2+T^2$的最大值為__________。



10. 在坐標空間中，已知$A(0,0,0),B(2,1,0),C(0,2,0),D(0,0,2),E(2,1,2),F(0,2,2)$為一個三角柱的六個頂點。如右圖(此為示意圖)。平面$H:x+y+z=3$將這個三角柱截出兩個部分，在這兩個部分中求包含A點的立體之體積為__________。



11. 有 30 顆黑球 30 顆白球在同一個箱子裡面，箱子外面有足夠多的黑球跟白球，每次從盒子裡隨機取出兩個小球，放在箱外。如果剛才取出的兩個小球都是白球，則從地上拿一個白球放入盒子；如果剛才取出的兩個小球都是黑球，則從地上拿一個白球放入盒子；如果剛才取出的兩個小球是一黑一白，則從地上拿一個黑球放入盒子。不斷重複，直至盒子裡只剩一個小球為止。那麼這顆球是黑色的機率=__________。

12. 試問滿足$m^3+n^3+99mn=33^3$且$m\cdot n\geq 0$的序對(m,n)有__________組整數解。

13. 有 100 扇門，分別編號 1~100 號，一開始全部都是關閉，按第一次為開，第二次為關，第三次為開…依此類推(也就是按奇數次為開、偶數次為關)，編號 1~100 號同學，但是 6 號同學沒來，只有 99 位同學。若每人將自己編號的倍數按一次，例如:1 號同學將全部的門都按 1 次，2 號同學會將 2、4、6、8、…、100 的門都按 1 次。請問這 100 扇門最後有__________扇門是打開的?

14. 設 $f(x)=\int_0^x (t+a)(t+2)^3\,dt$，已知圖形 $y=f(x)$在 $x=2$ 處有水平切線，求其反曲點坐標__________。

15. 已知｜$\log x$｜$= ax + b$ 有三個實根，其比為 1：2：3，求數對(a , b) =__________。

16. 設 $t\in$R，求$\left|t^2-\sqrt{(t^2-5)^2+(2t-3)^2}\right|$的最大值__________。

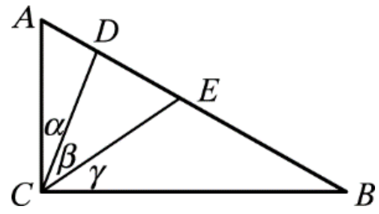
17. 坐標平面上，求不等式$\dfrac{(3x+y)^2}{5}+\dfrac{(2x-7y)^2}{4}\le 1$所代表的區域面積__________。

18. 設 A(1 , 4 , 1)、B(3 , 2 , 8)，在 L：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 上找一點 P，使$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$為最小，求此時點 P 的 x 坐標__________。

19. 設空間中三向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 、$\overrightarrow{c}$ 所展開的四面體體積為 V，
S= {P｜ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}$ ，$|\alpha|\le 1$ ，$|\alpha+\beta|\le 1$ ，$|\alpha+\beta+\gamma|\le 1$}的體積為 kV，則實數 k 的值為__________。

20. 數列$\langle a_n\rangle$滿足 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}+a_n\,(n\in \mathrm{N})$，已知 $a_{24}=71$，$a_{75}=13$，試求$\sum_{k=1}^{102}(-1)^k a_k$ =__________。

21. 令函數 $f(x)=x\sqrt{25-x^2}$ ，求 $f(x)$ 在區間 $[3,5]$ 的所有函數值之平均為__________。



22. 如圖，△ABC 中，$\angle C=90^0$，且 $3\,\overline{AD}=2\,\overline{DE}=\overline{EB}$ ，已知$\angle ACD=\alpha$ ，$\angle DCE=\beta$ ，$\angle ECB=\gamma$ ，求 $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$ 之值為__________。

二、計算題（共 4 題，各題配分於題後，合計 34 分）

說明：需有過程，否則不予計分。

1. 在 xy 平面上，點 O 為原點，點 $G(0,-2)$ 為定點。已知曲線 $y=x^3$ 上有三個動點 A,B,C ，其中動點 A 在第一象限內變動，動點 C 在第三象限內變動，且 A,B,C 三點滿足

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OG}$$

若 A,B,C 三點的 x 坐標分別為 a,b,c ，其中 $a>0$ ，試求 c 的最大值。（7 分）

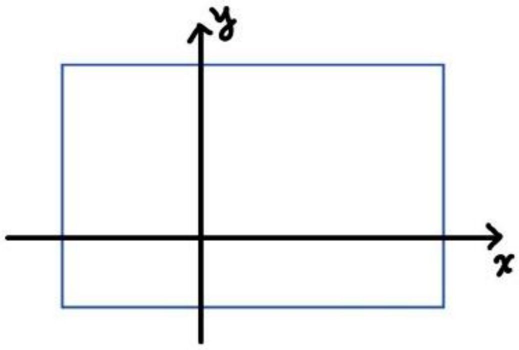
2. 設函數 $f(x)$ 的定義域為所有正整數所成的集合，函數值 $f(n)$ 為 $3n^2+n+1$ 這個數以十進位表示時所有位數的數字和。

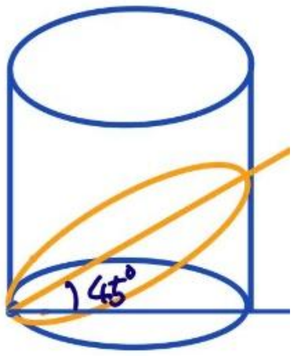
例如： $f(3)$ 為 $3\times 3^2+3+1=31$ 所有位數的數字和，即 $f(3)=3+1=4$ 。

試證：對於任意正整數 n ， $f(n)$ 的值永遠不會等於 2 。（9 分）

3. 設 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，求滿足 $\sum_{k=0}^{99}[2^k x]=2^{234}$ 的最小實數 x。（9 分）

4. 如圖，將一張長方形紙捲成(正)圓柱面，其中長方形長邊捲成圓柱底圓。已知此圓柱底圓直徑為 2，今以一平面(與圓柱底面夾角 45°)截此一圓柱，得一截痕，若將此張紙重新攤成平面，並在紙面上建立一平面坐標系使得 x 軸平行長方形紙面的長邊，y 軸平行長方形紙面的寬邊，則此截痕可以用一函數$y = f(x)$表示，求此函數並証明你(妳)的答案。（9 分）





參考答案

一、填充題

題號	1	2	3	4	5
答案	20 或 21	$\frac{4}{3}$	$(\frac{1}{3},\frac{10}{9})$	$\frac{2011}{22231}$	23
題號	6	7	8	9	10
答案	$\frac{13}{4}$	$\frac{40}{9}$	$\frac{-30}{13}+\frac{72}{13}i$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{9}$
題號	11	12	13	14	15
答案	0	35	24	$(1,\frac{-114}{5})$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3}\log\frac{3}{2},\log\frac{4\sqrt{3}}{9})$
題號	16	17	18	19	20
答案	6	$\frac{2\sqrt{5}}{23}\pi$	$-2+\sqrt{10}$	24	-58
題號	21	22			
答案	$\frac{32}{3}$	$\frac{4}{11}$			

二、計算題

1.

因為 $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OG}$，所以 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=-6 \end{cases}$，

由第一式可得 $b+c=-a$

代入第二式可得 $a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)=-6$

$\Rightarrow a^3+(-a)^3-3bc(-a)=-6$

$\Rightarrow bc=-\frac{2}{a}$

所以 b,c 為二次方程式 $t^2+at-\frac{2}{a}=0$ 的兩根，因為 $c<0$，所以

$$b=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+8a}}{2a},c=\frac{-a^2-\sqrt{a^4+8a}}{2a}$$

因為 $c=-\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}\right)$，令 $f(a)=a+\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}(a>0)$，

則 $f'(a)=\dfrac{\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}+a-\frac{4}{a^2}}{\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}}$ 解 $f'(a)=0$ 得 $\sqrt{a^2+\frac{8}{a}}=-a+\frac{4}{a^2}$

因為 $-a+\frac{4}{a^2}>0\Rightarrow 0<a<\sqrt[3]{4}$。

平方後得 $a^2+\frac{8}{a}=a^2-\frac{8}{a}+\frac{16}{a^4}\Rightarrow a^4=a\Rightarrow a(a-1)(a^2+a+1)=0$

因為 $a>0$，所以 $f'(1)=0$

$f(a)$ 的增減性如下表

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	4	$\nearrow$

故 $f(a)\geq f(1)=4$。又 $c=-\frac{1}{2}f(a)$，所以當 $a=1$ 時 c 有最大值 $-\frac{1}{2}f(1)=-2$

2.

利用反證法，假設存在 n 使得 $f(n)=2$ ，因為 $\left(3n^2+n+1\right)$ 必為奇數，依題意 $\left(3n^2+n+1\right)$ 只能為首位和末位均為 1，其餘位數均為 0 的數。亦即，$\left(3n^2+n+1\right)$ 可表示成 10^k+1 ，其中 k 為正整數。由此我們有

$$3n^2+n+1=10^k+1 \Rightarrow n\left(3n+1\right)=2^k\cdot 5^k$$

又因為 $\left(n,3n+1\right)=1$（互質），則得到

$$n=2^k, 3n+1=5^k$$

由此可推得 $3n+1\le 4n=4\cdot 2^k<5^k$ ，這與 $3n+1=5^k$ 矛盾。所以，原假設不成立，故得證。

3.

$2^{234}=\sum_{k=0}^{99}[2^k x] \le \sum_{k=0}^{99} 2^k x \ =(2^{100}-1)x \Rightarrow x \ge \dfrac{2^{234}}{2^{100}-1}=2^{134}+2^{34}+\dfrac{2^{34}}{2^{100}-1}$

設最小 $x=2^{134}+2^{34}+\dfrac{y}{2^{99}}$

則 $\sum_{k=0}^{99}[2^k\cdot\dfrac{y}{2^{99}}]=2^{34}$

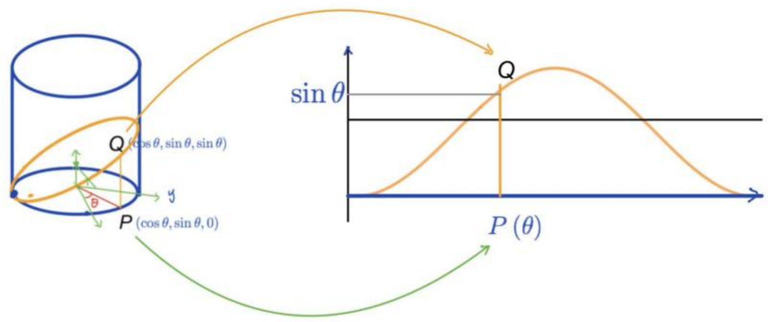
取 $y=2^{33}$ 時 ，$\left[2^k\cdot\dfrac{2^{33}}{2^{99}}\right]=0\ (k=0\sim 65)$; $\left[2^k\cdot\dfrac{2^{33}}{2^{99}}\right]=2^{k-66}\ \ (k=66\sim 99)$

此時 $\sum_{k=0}^{99}[2^k\cdot\dfrac{y}{2^{99}}]=1+2+2^2+\cdots+2^{33}=2^{34}-1$

因 $\sum_{k=0}^{99}[2^k x]$ 遞增，所以取 $y=2^{33}+1$ 即可，最小 $x=2^{134}+2^{34}+\dfrac{2^{33}+1}{2^{99}}$

4.

參考答案 $f(x)=\sin(x)$



圓柱所在的空間坐標系，選擇適當坐標使截痕所在平面方程式為 $z=y$，圓柱底圓上點 P 坐標為 $(\cos\theta, \sin\theta, -1)$，因此，若截痕上點 Q 在圓柱底圓上的正投影為 P 點，則點 Q 坐標為 $(\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta)$(因滿足方程式 $z=y$)。

故，紙張攤成平面後，OP 弧長 θ，$\overline{PQ}=\sin\theta$，故攤平後的截痕圖形為函數

$$f(\theta)=\sin\theta$$