國立彰化高級中學 115 學年度第一次教師甄選初試數學科試題卷

一、填充題(每題 5 分，共 85 分)

1. 設$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$為滿足以下條件的$n$項數列：

   (1) 對$k = 1,2,3,\cdots,n$，$a_k \in \{-1,0,1,2\}$；

   (2) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 16$；

   (3) $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_n}^2 = 50$；

   (4) $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots + {a_n}^3 = 70$；

   試求$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$的值為_________。

2. 設 $x \in R$ 且 $x \neq 1$，則 $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x-1}$ 之範圍為________。

3. 設f為定義域為正整數的函數，已知$f(115) = 115$，若對每一正整數n使得$f(n) + f(n+3) = n^2$恆成立，則$f(70) =$_________。

4. 設一圓周上有 18 個等分點，若取 3 個分點作三角形，則可作成______個銳角三角形。

5. 已知 x, y 都是自然數且 $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2007}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____

6. 彰化火車站有3個出口，每個出口每次僅能允許一個人出站，現有一個10人的旅行團到達彰化站，則出站的方式有_________種。

7. 設有 10 個二維數據，其統計資料如下：

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 20 , \sum_{i=1}^{10} y_i = 300 , \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 50$$

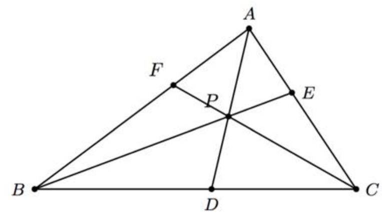
如果<u>歐利瑪隊長</u>求y對x的迴歸直線方程式時，不慎將斜率公式誤植為

$$\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i+\mu_x)(y_i+\mu_y)}{\sum_{i=1}^{10}(x_i+\mu_x)^2} = \frac{(x_1+\mu_x)(y_1+\mu_y)+(x_2+\mu_x)(y_2+\mu_y)+\cdots+(x_{10}+\mu_x)(y_{10}+\mu_y)}{(x_1+\mu_x)^2+(x_2+\mu_x)^2+\cdots+(x_{10}+\mu_x)^2}$$

求得斜率為$\frac{230}{17}$，其餘計算沒有錯誤，則正確的迴歸直線斜率應為_________。

8. 右圖中，P為三角形ΔABC內部一點，已知

$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=115$，試求$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\times\frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}\times\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}=$_________。



9. 已知 x, y 滿足方程式 $(\log_3 y)^2+(2^{x+1}+2^{1-x})\log_3 y+(2^{2x+1}+2^{1-2x})=0$，則數對 $(x,y)=$______

10. 設 m 為實數，已知方程式 $2|x-1|+3|mx-5|=6$ 恰有 2 實根，則 m 的範圍為_______。

11. 計算 $\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}=$_____。

12. 設 $z_1=1+i$，$z_{n+1}=\frac{i}{2}z_n$（$n\in N$），$S_n=\sum_{k=1}^{n}|z_{k+1}-z_k|$；若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 且 $|S-S_n|<10^{-20}$，

則 n 的最小值為________

13. 一遊戲規定為:自 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中任取相異的四個數字排成一個四位數，若此四位數是 99 的倍數，則可獲得相同數目的獎金，求玩此遊戲 1 次的期望值=_____。

14. 已知空間向量$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$滿足$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (7,1,-3)$，$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = (3,5,1)$，$\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = (-1,-7,5)$，試求$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$所展成的平行六面體體積為__________。

15. 設$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$，求$A^{115} =$ __________。(當a^n中的正整數指數$n \geq 10$時，可以不用展開)

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}} =$__________。

17. 設函數$f(z) = az^2 + bz + c$，其中a, b, c皆為複數。若對任意滿足$|z| \leq 1$的複數z，都有$|f(z)| \leq 1$，試求$|bc|$的最大值= __________。

二、計算證明題(共 15 分，需詳列計算或證明過程)

1. 已知$\triangle ABC$為銳角三角形，若$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$為分別為三邊$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$上的高，試證：$\triangle ABC$的垂心H必為$\triangle DEF$的內心。 (8 分)

2. 已知$x \in R$，證明方程式$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$恰有一個實數解並求此解。 (7 分)