臺北市立南港高級工業職業學校 115 學年度第 1 次教師甄選

<u>數學</u> 科筆試試題

作答說明： 1.請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號。
2.全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3.作答時不可使用計算機。
4.交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。
5.請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。

一、 填充題(每題 6 分)

1. 考慮有理數$\frac{n}{m}$，其中m、n為正整數且$1 \le mn \le 9$，則這樣的數值(例如$\frac{1}{2}$與$\frac{2}{4}$同值，只算一個)共有幾個________。

2. 坐標空間中有方向向量為$(1,2,2)$的直線L、平面E_1：$2x+3y+6z=12$與平面E_2：$2x+3y+6z=4$，則L被E_1、E_2所截線段的長度為________。

3. 已知ΔABC中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，且$\overline{AC}=2$，試求ΔABC面積為________。

4. 已知多項式$f(x)$滿足$f(3)=f'(3)=5$，試求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{xf(3)-3f(x)}{x-3}=$________。

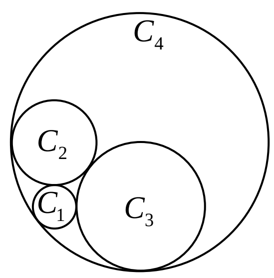
5. 在複數平面上，複數z在第一象限且滿足$|z|=1$以及$\left|\frac{-7+24i}{25}-z^3\right|=\left|\frac{-7+24i}{25}-z\right|$，其中$i=\sqrt{-1}$，則$z=$________。

6. 設a，b為實數，x為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為a。若$f(x)$滿足$\int_b^x f(t)dt=\frac{1}{2}(x^2+6x+10)^3-\frac{1}{2}$，則數對$(a,b)=$________。

7. 設$\langle a_n\rangle$為一等差數列。已知$a_1+a_3+a_5=15$，$a_2+a_4+a_6=18$。令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，則極限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=$________。

8. 乘積$\prod\limits_{k=4}^{63}\frac{\log_k\left(5^{k^2-1}\right)}{\log_{k+1}\left(5^{k^2-4}\right)}=\frac{\log_4\left(5^{15}\right)}{\log_5\left(5^{12}\right)}\cdot\frac{\log_5\left(5^{24}\right)}{\log_6\left(5^{21}\right)}\cdot\frac{\log_6\left(5^{35}\right)}{\log_7\left(5^{32}\right)}\cdots\frac{\log_{63}\left(5^{3968}\right)}{\log_{64}\left(5^{3965}\right)}=$________。

9. 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，其中$i=\sqrt{-1}$。試求下列連乘積之值$\prod\limits_{k=0}^{6}\left(\omega^{3k}+\omega^k+1\right)=$________。



10. 如右圖，設圓C_1：$x^2+y^2=1$、圓C_2：$x^2+(y-3)^2=4$、圓C_3：$(x-4)^2+y^2=9$。若有一圓C_4和圓C_1,C_2,C_3均相內切，則圓C_4方程式為________。

二、 問答題(每題 5 分)

以下是本校學生解題時常犯的錯誤，請寫出錯誤之處(3 分)並寫出正確答案(2 分)(不需要寫算式)。

1. 自點 $P(-2,3)$ 至圓 $2x^2+2y^2-4x+6y-2=0$ 之切線段長為何？

   甲同學的算式為：

   將 $P(-2,3)$ 代入圓方程式後開根號 $\sqrt{2(-2)^2+2\cdot 3^2-4\cdot(-2)+6\cdot 3-2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

2. 求通過點 $(2,3)$ 且兩軸截距相等的直線方程式？

   乙同學的算式為：

   由截距式設直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，將點 $(2,3)$ 代入得 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$。

   且兩軸截距相等 $a=b$，$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}=1$，得到 $a=b=5$，代回原式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

   直線方程式為 $x+y=5$

3. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\sqrt[3]{16-a_n^3}\ (n\in N)$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？

   丙同學的算式為：

   設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，代入遞迴式得 $t=\sqrt[3]{16-t^3}$，解方程式 $t^3=16-t^3$，$2t^3=16$，$t^3=8$，$t=2$。

   故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$。

4. 試求分式方程式 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x^3+4x^2+10x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 之所有實根。

   丁同學的算式為：

   兩邊同乘 $(x+1)(x+2)(x+3)$ 得：$(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)=x^3+4x^2+10x+11$

   左式展開 $(x^2+5x+6)+(x^2+4x+3)+(x^2+3x+2)=x^3+4x^2+10x+11$

   移項整理 $x^3+x^2-2x=0$

   因式分解 $x(x+2)(x-1)=0$

   所有實根為 $x=0,-2,1$

三、 教學題(每題 5 分)

請以簡明扼要說明在課堂上你會如何引導學生直觀理解以下概念，只寫計算過程或證明不予計分。

1. 設 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列，S_n 為其前 n 項的和，則 S_n、$S_{2n}-S_n$、$S_{3n}-S_{2n}$ 為等差數列。

   問題：除了代數證明，有沒有簡明扼要的方式說明這個性質。

2. 設坐標平面上 $A(x_1,y_1)$ 與 $B(x_2,y_2)$，點 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 P 坐標為 $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。

   問題：為什麼公式是 n 乘上 A 坐標，m 乘上 B 坐標(交叉相乘)。

3. 試求不定積分 $\int x(x^2-1)^{115}dx$。

   問題：利用變數變換，令 $u=x^2-1$，為什麼需要求導算出 $\dfrac{du}{dx}=2x$？這個步驟在積分變換中的意義是什麼？

4. 設 $k\neq 0$，$y=\sin(kx)$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|k|}$。

   問題：如何直觀地向學生解釋，當三角函數的 x 乘上 k 倍時，週期反而是除以 $|k|$。