臺北市立成淵高級中學 115 學年度正式教師甄選
—高中數學科筆試

第壹部分：填充題（每題 6 分，共 72 分）

※每格$\boxed{\text{完全答對才給分}}$；答案若為分數，請以最簡分數表示；若有根號，請以最簡根式表示。

1. 滿足 $\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{5}{6}$ 的所有實數 x 為 $\underline{\quad 0,1 \quad}$。

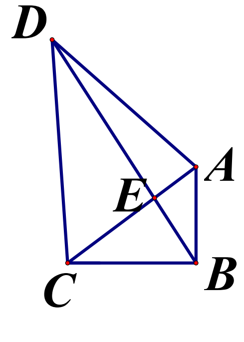
2. 若 $\begin{cases} xy=64 \\ 2\log_x y+3\log_y x=7 \end{cases}$，其中 x,y 為實數，則數對 (x,y) 為 $\underline{\quad (16,4)\ ,\ (2\sqrt{2},16\sqrt{2}) \quad}$。

3. 設正立方體骰子 A 的六面點數分別為 $1,2,3,4,5,6$，正立方體骰子 B 的六面點數分別為 $2,3,5,7,11,13$，且兩個骰子各面出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$。某人投擲骰子 A、B 各一次，若 A 骰子的點數等於 B 骰子的點數，則可獲得 2026 元；若 A 骰子的點數大於 B 骰子的點數，則可獲得 115 元；若 A 骰子的點數小於 B 骰子的點數，則可獲得 0 元。設獲得金額的期望值為 $\frac{q}{p}$ 元，其中 p,q 為兩互質的正整數，則數對 (p,q) 為 $\underline{\quad (18,3499) \quad}$。

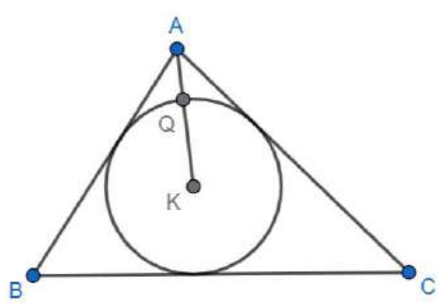
4. 已知函數 $f(x)=1+\frac{3}{2}x+\sqrt{4-x^2}$，其中 $-2\le x\le 2$。設函數 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，試求數對 (M,m) 為 $\underline{\quad (1+\sqrt{13},-2) \quad}$。

5. 已知 x 為正實數，則 $(x+\frac{1}{x})(x+\frac{2}{x})(x+\frac{4}{x})$ 的最小值為 $\underline{\quad 18\sqrt{2} \quad}$。

6. 如圖，平面上有一個四邊形 $ABCD$，設兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於點 E，已知 $\overline{AB}=3,\overline{BC}=4,\overline{AC}=5,\overline{AD}=6,\overline{CD}=7$，則線段 $\overline{AE}$ 的長度為 $\underline{\quad \frac{48}{25}+(-\frac{3}{25})\sqrt{6} \quad}$。



7. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，$\triangle ABC$ 的內心為 K 點，Q 點為 $\overline{AK}$ 和 $\triangle ABC$ 內切圓的交點，且 $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AK}$，則實數 t 的值為 $\underline{\quad \frac{5-\sqrt{10}}{5} \quad}$。



8. 在坐標平面上有一個橢圓的方程式為$5x^2-6xy+5y^2=72$，則此橢圓的正焦弦長為___3___。

9. 空間中有不共平面的四點O,A,B,C，令$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$，$D,E$為空間中的兩點滿足$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$，$P$在$\overline{DE}$上且$\overline{DP}:\overline{PE}=2:3$。已知過$A,C,D$三點的平面與$\overrightarrow{OP}$交於點$Q$，則$\triangle OAQ$與$\triangle APQ$的面積比為___$5:2$___。

10. 已知方程式$x^3-2x^2+3x-4=0$之三根為α,β,γ，且以$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2),(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2),(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)$為三根之方程式為$x^3+ax^2+bx+c=0$，則數組$(a,b,c)$為___$(1,7,23)$___。

11. 在複數平面上，P_k表示$(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^k$所代表的點（$k=0,1,2,3,4$），令以$P_1,P_3,P_4$為頂點的三角形其重心坐標為$z$，則$|z|$的值為___$\frac{\sqrt{5}-1}{6}$___。

12. 設$f(x)$為三次實係數多項式，滿足x^3項的係數為 1，$f(x)=0$有三相異實根，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$，函數值$f(3)<0$。已知$y=f(x)$的函數圖形會與$x$軸圍出兩個封閉區域，而且這兩個封閉區域的面積和為$\frac{253}{2}$，則$f(3)$的值為___$-30$___。

第貳部分：計算證明題（共 28 分）

※請將解題過程書寫於答案卷方框內。若只有答案，**沒有詳述原因或推導過程會斟酌扣分**。

1. 某社團有六位同學，最高的同學為 178 公分，最矮的同學為 158 公分，另外還有兩位同學的身高分別為 163 公分和 173 公分。考慮這六位同學身高的數值，已知這六個數值為完全相異的正整數，且算術平均數等於中位數，請回答下列各小題。
   (1) 試證：這六個數值之總和是 3 的倍數。（4 分）
   (2) 試求這六個數值之算術平均數的所有可能值。（10 分）

【簡答】：(1) 略　(2) $167,167.5,168,168.5,169$

2. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}={a_n}^2+a_n+1\ ,n\in\mathbb{N} \end{cases}$，請回答下列各小題。
   (1) 證明：對於所有的正整數n，均滿足a_n-2是5的倍數。（4 分）
   (2) 證明：對於所有的正整數n，均滿足${a_n}^2+1$是5^n的倍數。（10 分）

【簡答】：(1) 略　(2) 略