※請用藍色或黑色原子筆在答案卷上**依照題號順序**作答，記得清楚標示題號。

一、填充題(10 題，每題 6 分，共 60 分)

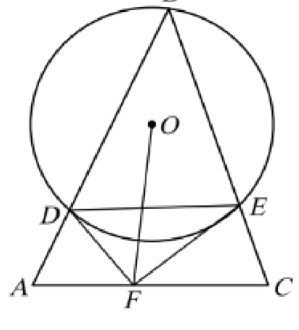
1. 已知實數x、y、z 滿足：$x^2+y^2+z^2=14+6\sqrt{3}$，且$x+y+z=2+\sqrt{3}$，
   試求$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$ 之值為______。

2. 設$f(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+1$，$g(x)=x^3+2x^2-3x-1$，且α, β, γ 為$g(x)=0$之 3 根。試求：$\frac{1}{f(\alpha)}+\frac{1}{f(\beta)}+\frac{1}{f(\gamma)}$ 之值為______。

3. xy平面上滿足不等式：
$$|x^2+y^2-2x+4y-18|\le 2x-2y+18$$
   之所有點所成的集合為 S，則 S 的面積為______。

4. 設$a>1$，$b>1$，且滿足$\begin{cases}\log_{10} ab=\dfrac{4}{\log_a 10+\log_b 10}\\ (\log_{10} a)^2+(\log_{10} b)^2=18\end{cases}$，則$a+b$之值為______。

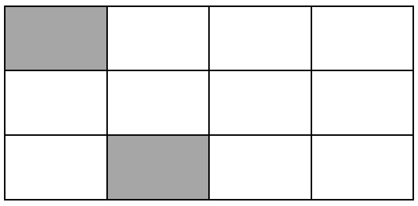
5. 如下圖，在$\triangle ABC$之三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上分別取點D、E、F，使得$\overline{AF}=\overline{FD}=12$，$\overline{CF}=\overline{FE}=15$。
   設$\triangle BDE$之外接圓圓心為O，已知$\overline{OF}=18$，則$\triangle BDE$之外接圓面積為______。



※請用藍色或黑色原子筆在答案卷上**<u>依照題號順序</u>**作答，記得清楚標示題號。

6. 設複數 z 滿足 $|4z-2|=1$，在複數平面上，以 $(1+i)z$，$(4+4i)z$，$(-3+5i)z$ 為三頂點所形成的三角形，其面積的最大值為______。

7. 將相同的紅球 4 個，藍球 4 個，白球 2 個全部放入棋盤的 12 個格子中(如下圖)，每格最多放一個球，已知灰色格子內沒有球的條件下，第一列沒有紅球且第二列沒有藍球且第三列沒有白球的條件機率為_________。



8. 設隨機變數 X 表示連續投擲公正銅板直到出現連續二次反面就停止的次數，若 X 之期望值為 a、變異數為 b，則數對 (a, b) 之值為_________。

9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ ＝______。

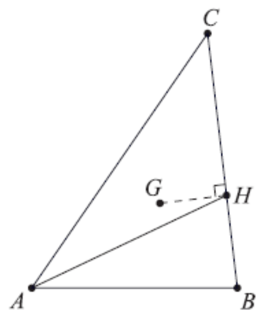
10. 求定積分 $\int_{-3}^{3}\left|\sqrt{9-x^2}-(x+3)\right|dx$ 的值為______。

※請用藍色或黑色原子筆在答案卷上**依照題號順序**作答，記得清楚標示題號。

二、計算題(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、⋯、8 的卡牌共十張，其中編號 8 和編號 6 各有兩張相同的卡牌，其他編號的卡牌均只有一張。從這十張卡牌隨機抽出四張，且抽出後不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：
(1) 此四位數大於 6400
(2) 此四位數含有兩個數字 8
(3) 此四位數含有兩個數字 6
例如：若抽出四張卡牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。
依上述規則，共有幾個不同的四位數可獲得獎品？

2. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=5$、$\overline{AC}=6$，過$\triangle ABC$ 的重心 G 作垂線交 $\overline{BC}$ 於 H，若 $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，試求數對$(\alpha,\beta)$。



3. 設$\overline{AB}$為拋物線 $x^2=8y$ 的一弦，O 為原點。若$\overline{OA}\perp\overline{BO}$，試求$\Delta OAB$面積的最小值為多少？

4. 設橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$，其中心為原點。點 P 為橢圓上的一動點。若以原點 O 為旋轉中心，將 OP 逆時針旋轉60^o得到 OQ，當 P 點沿著橢圓繞行一周時，試求 Q 點的軌跡方程式。

5. 如圖，圓形紙片的圓心為O，半徑為10公分, 該紙片上的正六邊形 $ABCDEF$ 之中心為O，P、Q、R、S、T、U 為圓O上的點，小南沿虛線剪開後，分別以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FA}$為折痕折起$\triangle PAB$、$\triangle QBC$、$\triangle RCD$、$\triangle SDE$、$\triangle TEF$、$\triangle UFA$，使得P、Q、R、S、T、U 重合，形成一個正六角錐。若正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為x公分時，正六角錐的體積為$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{f(x)}$立方公分，其中 $f(x)$為五次實係數多項式。
試回答下列問題：
(1) $f(x)$。
(2)求出此正六角錐體積的最大值為何？