

國立嘉義女子高級中學 115 學年度第 1 次教師甄選初試試題卷

科目：數學科

時間：115/05/23(六)10：30～12：00 計 90 分鐘。

說明：1.本試題卷共有 3 張 3 頁計有 二大題試題。答案請書寫於答案卷(一張兩面)。

2.請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。

3.可利用試題卷空白處書寫或計算。

4.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

作答說明：所有的答案請依題號填寫於答案卷上，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，否則不予計分。禁用計算機。

試題與答案卷共5頁。

一、填充題(計14題，每題5分，共70分)：

1. 甲箱中共有 7 顆紅球，4 顆白球，每次從甲箱中取一顆，放入乙箱內，直至甲箱無球為止。假若每次取出放入時，乙中紅球數量，皆不少於白球的數量，試問有幾種取法？

2. 設 $m, \frac{3m+25}{2m-5}$ 皆為正整數。則所有符合條件的 m 的和為？

3. $\sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = ?$

4. 已知 $|\log_2 x| = ax + b$ 之三相異實根，由小到大依次成為公比為 2 的等比數列，則 $(a, b) = ?$

5. 圓內接五邊形 $ABCDE$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 4$ ，且 $\overline{AE} = 1$ 。
則 $(1 - \cos \angle ABC)(1 - \cos \angle ACE) = ?$

6. 設 $P(x, y)$ 為 $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ 上任一點， $\frac{x+y+1}{x-y+3}$ 之最大值為 M ，最小值為 m ，則 $(M, m) = ?$

7. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ， $D \in \overline{BC}$ ，且 $\overline{BD} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ 。則 $\overline{AD} = ?$ (以 b, c 表示)

8. 聯立方程組
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 3xy = 3 + 2\sqrt{2} \\ y^2 + z^2 - yz = 9 + 6\sqrt{2} \\ z^2 + w^2 + \sqrt{3}zw = 3 + 2\sqrt{2} \\ w^2 + 3x^2 + \sqrt{3}wx = 9 + 6\sqrt{2} \end{cases}$$
 求 $\sqrt{3}xz + yw$ 之值為_____。

9. 設 Γ 為 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 繞 y 軸旋轉而成的立體(torus)，則 Γ 的體積為_____。

10. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，首項 $a_1 = \frac{1}{5}$ ，且滿足 $a_n + 2S_n S_{n-1} = 0 (n \geq 2, n \in N)$ ，則 $\frac{1}{S_{2026}} =$ _____。

11. 嘉鹿同學聽到嘉義市舉辦皮克敏活動。其中一個活動為開啟遊戲後每走一步即可於手機 APP 上獲得一張集字卡，字卡隨機出現「皮」的機率為 $\frac{1}{2}$ 、出現「克」的機率為 $\frac{1}{4}$ 、出現「敏」的機率為 $\frac{1}{4}$ 。收集字卡活動集滿「皮」「克」「敏」即可獲得一頂皮克敏相關帽子。問嘉鹿同學成功收集到「皮」、「克」、「敏」三字所需走路步數的期望值為_____。

12. 複數平面上， O 為原點， $\triangle ABO$ 的頂點 A 、 B 分別對應複數 z_1 、 z_2 ，若 $|z_1 - 2 - 2i| = |z_1 - 4 - 4i|$ 且 $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)z_1$ ，則 $\triangle ABO$ 的最小面積為 _____。

13. 在坐標空間中， O 為原點， $\overrightarrow{OP} = (2\sin\alpha - \cos\beta, \sin\alpha + \cos\beta, \sin\alpha + 2\cos\beta)$ ，其中 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ 且 $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}$ 。求所有 P 點所成的區域面積。

14. 有 A, B, C, D 四艘不同的船，其中 A, B, C 三船個別最多可載 3 人，D 船最多可載 4 人，求 5 人同時安全渡河的方法各有多少種？

二、計算證明題（計3題，每題10分，共30分）：

1. 設對於所有實數 x, y ，函數 f 滿足 $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy(x + y)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

(1) $f(0) = ?$ (2分) (2) $f'(x) = ?$ (5分) (3) $f(x) = ?$ (3分)

2. 平面上由上而下依序畫三條相異的平行直線，其中第一條與第二條、第二條與第三條的距離分別為 d_1 ， d_2 ，若在三條直線上各取一點，使它們構成一個正三角形，則此正三角形的邊長為何？

3. 證明在空間中，由 $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ 、 $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ 、 $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ 三向量所決定的平行六面體的體積為 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 。