高雄市 115 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選
數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題（1 至 6 題每題 5 分，7 至 16 題每題 7 分，共 100 分）

請用藍或黑色原子筆寫下完整計算過程，否則不予計分

1. 給定空間中四點 $O(0,0,0)$，$A(-11,1,2)$，$B(1,1,5)$，$C(7,-2,-1)$，

設 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le x$，$y\le z\le 1$，

試求 $\overrightarrow{OP}$ 之終點 P 所形成區域的體積。

2. 圖 1 為函數 $f(x)=a\cos(bx+c)+k$ 的圖形，

其中 $A(\frac{5\pi}{18},1)$，$B(\frac{11\pi}{18},4)$，$b>0$，$\pi<c\le 2\pi$，試問數對 (a,b,c,k)。

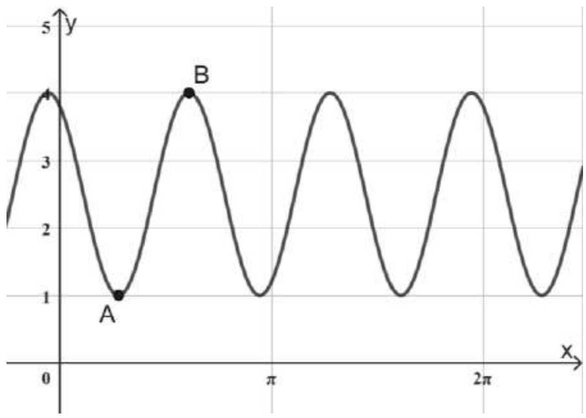

圖 1

3. 若函數 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{x-3}$，則導數 $f'(2)=$？

4. 想要給 4×4 方格中標記上「圈圈」與「叉叉」，

使得每一行或每一列正好有兩個「圈圈」和「叉叉」方格，

一共有幾種不同方法？

5. 設 $\log A=a$，$\log B=b$，$\log C=c$，且 $a+b+c=0$，

求 $A^{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\cdot B^{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)}\cdot C^{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$ 之值。

6. 袋中十顆球分別為 1、2、…、9、10 號球，從袋中隨機拿取三顆球，

求此三球球號數兩兩互質的機率為何？

7. 已知二次實係數多項式 $f(x)$ 及三次實係數多項式 $g(x)$ 領導係數皆為 1，

且 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $x+2$，$(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $2x-1$，

試求兩多項式 $f(x)$、$g(x)$。

8. 已知 $y=8x^2-36x+34$ 和 $y=\dfrac{k}{x}$ 交於 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 三點，若 x_1、x_2、x_3 成等差數列，試問 k 之值為何？

9. 已知坐標平面上一點 P，先對直線 $y=x$ 對稱後再對直線 $y=2x$ 對稱的點坐標，會與 P 直接對直線 $y=3x$ 對稱的點坐標相等。若滿足這樣條件的點必落在直線 $y=mx$ 上，試求 m。

10. 求方程式 $x^2+y^2=6x+6\sqrt{3}|y|$ 之圖形所圍成區域的周長。

11. 設 z 為一複數。若 $\dfrac{2z-(9+3\sqrt{3}i)}{z}=\sqrt{3}\left(\cos150^\circ+i\sin150^\circ\right)$，試求 $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-(3+\sqrt{3}i)}{z}\right)$ 之值。

12.試問$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+6}+\frac{1}{3n+12}+\frac{1}{3n+18}+\dots+\frac{1}{3n+6n}\right)$之值為何？

13.設$[x]$為不超過x的最大整數，求$[\frac{1}{\sqrt{115}}+\frac{1}{\sqrt{117}}+\frac{1}{\sqrt{119}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2025}}]$之值。

14.在海軍演習的雷達螢幕上，兩架無人機正在執行飛行測試，它們在同一時間出發，偵察機從$A(1,0,2)$沿著直線等速飛行2秒後到達位置$B(5,4,0)$。攔截機從$C(1,11,13)$沿著直線等速飛行1秒後到達位置$D(2,9,10)$，假設經過一段時間後，兩架無人機的距離最近，試求此時的最近距離。

15.空間中直線$L_1:\frac{2-x}{2}=\frac{1+y}{-1}=\frac{1-z}{2}$、$L_2:\frac{1-x}{2}=\frac{1-y}{-2}=\frac{2+z}{1}$。

若L_1落在平面E上，且L_2和平面E的夾角之餘弦值為$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

試問平面E的方程式為何？

16.求證$\frac{1}{\sin 24^\circ}+\frac{1}{\sin 48^\circ}+\frac{1}{\sin 96^\circ}=\frac{1}{\sin 168^\circ}$。