

新竹縣立自強工業高級中等學校第三次教甄 數學科 筆試試卷		試卷共 三 頁 <input type="checkbox"/> 繳回試題卷 <input type="checkbox"/> 繳回答案卷
命題範圍：技術型高中數學科 專業知能	紙張大小： <input type="checkbox"/> 雙面 <input checked="" type="checkbox"/> 單面	姓名： 准考證號碼：

一、選擇題：每題 4 分，共 20 分

1. () 設 θ 是銳角，則 $\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$ 為
 (A) $2 \sin \frac{\theta}{2}$ (B) $2 \cos \frac{\theta}{2}$ (C) $\sin \theta$ (D) $\cos \theta$
2. () 某社區規劃在 12 月份（共 31 天）舉辦三場不同的節慶講座（冬至講座、聖誕講座、跨年講座）。為了讓住戶有充足休息，管委會規定：
 (1) 每場講座佔用一天，且各在不同日期舉行。
 (2) 任意兩場講座之間至少要隔 4 天（例如：若 12/1 辦講座，下一場最早只能在 12/6 舉辦）。
 請問管委會共有多少種安排這三場講座日期的方案？
 (A) 1771 (B) 10626 (C) 13800 (D) 26970
3. () 某校規劃在校園平面圖上設置一條筆直的無障礙通道，通道中心線以直線 $3x - 4y + 6 = 0$ 表示。校園中有一座圓形花園，其邊界可用圓 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 表示。若無障礙通道的中心線與圓形花園的位置關係，需根據「圓心到直線的距離」來判斷，請問下列敘述何者正確？
 (A) 圓心到直線距離為 8，且直線與圓相離。
 (B) 圓心到直線距離為 2，且直線與圓相切。
 (C) 圓心到直線距離為 $\frac{16}{5}$ ，且直線與圓相離。
 (D) 圓心到直線距離為 $\frac{8}{5}$ ，且直線與圓交於兩點。
4. () 某自動導航系統以複數平面表示無人機的位置。設基地為原點 O ，複數 $z = x + yi$ 表示無人機校正前的位置，其中 x 、 y 的單位為公里。某次校正過程如下：
 (1) 先將位置向量以基地 O 為中心逆時針旋轉 90° ，並縮小為原來的 $\frac{1}{2}$ ；
 (2) 再將所得位置向東平移 3 公里、向北平移 3 公里。
 若校正後的位置記為 w ，且校正前後無人機與基地的距離相等，也就是 $|z| = |w|$ 。令所有滿足條件的點 z 在複數平面上形成軌跡 Γ 。若 Γ 與實軸交於兩點 A 、 B ，與虛軸交於兩點 C 、 D ，則四邊形 $ACBD$ 的面積為何？
 (A) 28 (B) 42 (C) 56 (D) 64

5. () 設函數 $f(x) = a \cos(b(x-c)) + d$ ，其中 $a > 0, b > 0, 0 < c < \frac{\pi}{2}$ 。已知 $f(x)$ 的圖形滿足下列條件：

(1) 最大值為 5，最小值為 -1；

(2) 最小正週期為 $\frac{2\pi}{3}$ ；

(3) 圖形在 $x = \frac{\pi}{6}$ 處取得最大值；

(4) 圖形通過點 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 。

下列哪一個函數可能是 $f(x)$ ？

(A) $f(x) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

(B) $f(x) = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

(C) $f(x) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

(D) $f(x) = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$

二、填充題：每格 5 分，共 50 分

1. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式， $-3 \leq x \leq 5$ ，滿足

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x \left(\int_0^2 f(t) dt \right) + 38,$$

則 $f(x)$ 的最大值為 _____，最小值為 _____。

2. 設一 $\triangle ABC$ 的三高為 6, 4, 3，則最小角的餘弦為 _____， $\triangle ABC$ 面積為 _____。

3. (1) 自 1 ~ 12 的 12 個自然數中，任選三個相異自然數 a, b, c ，且 $a < b < c$ 。若規定這三個數的間隔至少要 4 (即 $b - a \geq 4$ 且 $c - b \geq 4$)，則共有 _____ 組解。

(2) 若將 1 ~ 12 這 12 個自然數排成一個圓圈。從中任選三個相異自然數 a, b, c ，且規定在圓圈上，任何兩個選中的數之間，至少都要隔著 1 個沒被選中的數，則共有 _____ 組解。

4. 坐標平面上 (5, 6) 處有一光源，將圓 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 投影到 x 軸上，則投影的兩端點分別為 (_____, 0) 和 (_____, 0)。

5. 設

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2}}。$$

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$ ，並將其黎曼和表示為 $\int_0^1 f(x) dx$ ，則 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若 $a > 0$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+an}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2an}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(1+a)n^2}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

三、計算題：每題 10 分，共 30 分

1. (1) 試對 x 微分： $\int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^4} dt$ 。 (5 分)

(2) 設 $\int_3^x \frac{1}{1+t^2} dt = F(x)$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x)}{x-3} = ?$ (5 分)

2. 設 (x, y) 為區域 $4x - y - 7 \leq 0$ ， $3x - 4y + 11 \geq 0$ ， $x + 3y - 5 \geq 0$ 內任一點，求：

(1) $x - y$ 的最大值。 (4 分)

(2) $x^2 + y^2$ 之最大值與最小值。 (6 分)

3. 方程式 $2\log_{10}(x-a) + 1 = \log_{10}(x-b)$ ，甲生看錯 b ，解得二根為 $\frac{29}{10}$ 、 $\frac{16}{5}$ ；乙生看錯 a ，解得二根為 $\frac{44}{5}$ 、 $\frac{73}{10}$ 。求：

(1) a 、 b 之值。 (6 分)

(2) 此方程式的正確解。 (4 分)