國立南科國際實驗高級中學115學年度第1次教師甄選 題目卷

科目：高中部數學科　　　　　　　　　　　　　　　第一頁

第一部份、填充題 70%（每題 5 分，共 70 分。請依題號順序，在指定格子內作答）

1. 設 α,β,γ 為方程式 $(\log x)(\log 5x)\left(\log\frac{x}{6}\right)-(\log 3x)^2+2=0$ 的三根，則三根積 $\alpha\beta\gamma=$______。

2. 平面上有兩點 $A(1, 4)$，$B(3, 2)$，若點 $P(x, y)$ 在以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓上移動，則 $xy-3x-2y$ 之最大值為______。

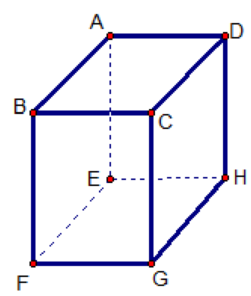
3. 方程式 $\sin x-3\cos x=k$ 在 $0\le x\le\pi$ 的範圍內有兩個相異的實數解，則實數 k 的最大範圍為______。

4. 正項等比數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_2=2$、$a_6=\frac{1}{8}$，求 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{99}a_{100}$ 的和 =______。

5. 若一封信不知寄自 TENNESSEE 或 MISSISSIPPI，但郵戳上恰有兩連續字母可認清，則在已知此兩字母是 SS 的條件下，此信寄自 MISSISSIPPI 的機率為______。

6. 已知橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$。直線 L 為過橢圓上一點的切線，若橢圓的焦點 F_1,F_2 到 L 的垂足分別為 M,N，求 $|F_1M|\cdot|F_2N|$ 的值（以 a,b 表示）______。

7. 如圖，一長方體 $ABCD-EFGH$，若直線 $\overleftrightarrow{BC}:\frac{x+6}{1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+4}{-2}$，直線 $\overleftrightarrow{FH}:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{1}$，點 $H(2,-3,1)$，則長方體 $ABCD-EFGH$ 的體積為______。



8. 有十個數 $a,b,c,d,e,f,8,11,12,17$。若此十個數的平均數與 a,b,c,d,e,f 六個數的平均數相等，且兩組數的變異數也相等（變異數採用平均平方差定義），求此變異數為______。

9. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+4)^2}+\frac{n}{(n+6)^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{(3n-2)^2}\right]=$______。

10. 設 n 為正整數，且 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{119}{2160}$，求 $n=$______。

11. 設 t 為實數，直線 $L_t:(3\cos t)x+(5\sin t)y=15$。若 $f(t)$ 表示原點 $(0,0)$ 到直線 L_t 的距離，求 $f(t)$ 的最小值為______。

12. 已知 n 與 $\sqrt{113\times115\times117\times119\times121+n}$ 皆為正整數，則 n 的最小值為______。

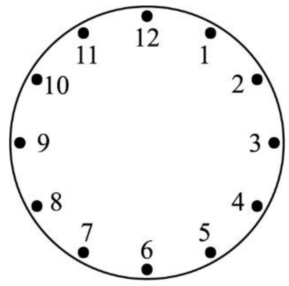
13. 有一個依順時針方向依序標示1,2,…,12數字的圓形時鐘(如圖)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：

(I)若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動5個鐘點。

(II)若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動5個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置，則 ($X_{10}-7$) 的期望值為______。



14. 高斯記號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，若正實數 a 滿足 $\frac{1}{2}\times[\,a^2+a\,]=19a+99$，則 $a=$______。

(附註：$\sqrt{540}\approx 23.2379$, $\sqrt{541}\approx 23.2594$, $\sqrt{542}\approx 23.2809$)

第二部份、計算及證明題 30%（每題10分，共30分）

1. 設 $a,b,c,d\ \geq 0$ ，求 $\frac{16d}{a+b+c}+\frac{25c}{a+b+d}+\frac{36b}{a+c+d}+\frac{49a}{b+c+d}$ 的最小值。

2. 設 $0\leq\theta<2\pi$。考慮曲線$(4-2\sin\theta)x^2-(3\cos\theta)y=0$與直線$y=3x$兩者有兩個交點（本題中重合也算兩個交點）。求使這兩交點間距離最大的 θ。

3. $\triangle ABC$中 I 為內心，內切圓半徑為 r，$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AI}=x$, $\overline{BI}=y$, $\overline{CI}=z$, $s=\frac{a+b+c}{2}$ ，試證明：$abcr=xyzs$。