准考證號碼：

姓名：

臺北市立南港高級中學 115 學年度第 2 次正式教師甄試-高中數學科筆試

請於答案卷上作答，標示題號並詳細呈現解題過程

共 20 題，每題 5 分，滿分 100 分

1. 將數字1、2、3、⋯、9等9個數字排成九位數（數字不得重複），使得前5位從左至右遞增、且後5位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

2. 若 $f(x)=10(x-1)^2+9(x-2)^2+8(x-3)^2+\cdots\cdots+1(x-10)^2$ 在 $x=x_1$ 時有最小值 y_1，

   且 $g(x)=10\left|x-1\right|^2+9\left|x-2\right|^2+8\left|x-3\right|^2+\cdots\cdots+\left|x-10\right|^2$ 在 $x=x_2$ 時有最小值 y_2，試求數對 (x_1,x_2)。

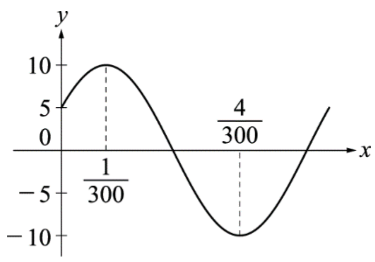
3. 坐標平面上，向量 (a,b) 與直線 $y=bx-1$ 垂直，則 $a-b$ 的最大可能值為?此時 a,b 分別為多少？

4. 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+x+\int_k^x f(t)dt$，試求 $\int_{-3}^{2} f(x)dx$。

5. 設空間中兩點 A(a, -2, 1)、B(7, b, 4) 分別在平面 E：2x + y - z = 4 上的投影點為 P、Q。已知向量 $\overrightarrow{PQ}$ = (1, c, 5)，試求數對 (a, b, c)。

6. 已知 $\log_4 A = \log_6 B = \log_9 (A+B)$ ，求 $\dfrac{A}{B}$ 。

7. 電流強度 I（安培）隨時間 t（秒）變化的函數 $I(t) = a\sin(bt+c)$ 如圖所示，其中 a，$b>0$，$0\le c<\pi$ ，試求數對（a，b，c）。



8. 設 $a>0$ ， $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式。直線 $L: y=2x-1$ 。已知

① $y=f(x)$ 的反曲點為 $A(1,1)$

② $y=f(x)$ 和直線 L 都通過 $A(1,1)$ 、 $B(3,5)$ 兩點

③ $y=f(x)$ 和直線 L 所圍的區域面積為 24

求數對 (a,b,c,d) 。

9. 設二階方陣 M = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 代表座標平面上的一個線性變換。若存在一直線 L 通過原點，且 L 上所有的點經過 M 變換後，仍落在同一直線 L 上，試求出所有滿足此條件的直線 L 之方程式。

10. 從 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為何？（化成最簡分數）

11. 已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E。若 $\overrightarrow{AB}=(2,-6),\overrightarrow{AD}=(1,5)$ 且 ΔABE 面積為 3。則四邊形 $ABCD$ 面積為何？

12. 直角座標平面上，設正 ΔABC 之重心為 $O(0,0)$，其中一個頂點為 $A(3,y)$ 滿足 $(3+yi)^3=-117-44i$，$i=\sqrt{-1}$。若 ΔABC 的外接圓在 B,C 兩點的兩切線交於點 P，求 P 點座標。

13. 已知都教授手中握著一個紅球與一個袋子,而袋中有 3 個紅球及 2 個白球,一次交換為都教授自袋中任取一球,再將原本握在手中的球放入袋中。設袋中每一球被取出的機率相等, 若 P_n 表示交換 n 次,都教授手中的球仍是紅球的機率。若實數 r,s 滿足 $P_n=rP_{n-1}+s$, 求數對 (r,s)。

14. 某洗衣機的行程必須從一、二、三、四、五共 5 種不同衣料擇一，搭配甲、乙、丙、丁共 4 種不同模式擇一，另有 A、B、C 共 3 種附加功能，每種附加功能可以自由選擇是否開啟，但是「第一種衣料」不可以與附加功能「A」同時使用。例如「第二種衣料」搭配「甲模式」，且同時開啟「A」、「B」兩種附加功能為一個可以的行程；但「第一種衣料」搭配「甲模式」，且同時開啟「A」、「B」兩種附加功能為一個不可以的行程。根據上述，此洗衣機共有多少個可以的行程？

15. 設 x 為正實數，$f(x)=x^2+4x+6+4x^{-1}+x^{-2}$，試求 $f(x)$ 之最小值。

16. 設 k 為實數，試就 k 值討論方程式 $\log_2|3x^3-18x+4\sqrt{2}|=k$ 有幾個相異實根？

17. 平面上有一箏形 $ABCD$，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$ ， $\overline{AD}=\overline{CD}=2$ ， $\angle BAD=135°$ 。求 $\overline{AC}$ 線段長。(化為最簡根式)

18. 若直線 $y=3x+k$ 和 $\Gamma: x=\sqrt{4-y^2}$ 交於相異兩點，試求 k 之範圍。

19. 求對數方程式 $\log_2 x+\log_8 x=2(\log_2 x)(\log_8 x)$ 所有實數解的和為多少？

20. 抽屜中有 3 枚外觀相同的硬幣，A 為「雙反面硬幣」，B 為「正常硬幣」，C 為「不均勻硬幣」(其出現正面機率為 p，$0\le p\le 1$)。某人從中隨機盲抽一枚，連擲兩次，觀察到「一正一反」的結果。令在此條件下，抽中 B 硬幣的機率為 P(B | 一正一反)。

(1) 試證明：無論 p 之值為何，P(B | 一正一反) ≥ $\frac{1}{2}$ 恆成立。

(2) 若已知 P(B | 一正一反) = $\frac{1}{2}$，求 p 之值。