

澎湖縣 115 學年度國民中學聯合甄選正式教師筆試

數學專門科目試題

注意事項：

1. 考試前請先核對答案卡、准考證、桌號之准考證號碼是否相符。
2. 每題均為單選題，請選出一個正確答案，答錯不倒扣。
3. 請將答案以 2B 鉛筆劃記在答案卡上。

選擇題 50 題（每題 2 分，共 100 分）

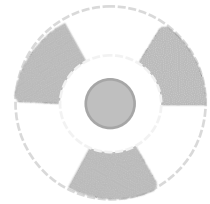
一、選擇題（共 50 題）

1. 美美要製作一張「注意輻射」的標誌，步驟如下：

步驟 1：在紙上任取一點為圓心，分別以 1, 2, 4 單位長為半徑畫同心圓。

步驟 2：將 3 個同心圓等分割成 6 等分。

步驟 3：將部分區域塗上灰色（如圖一）。



圖(一)

關於這張「注意輻射」的標誌，美美提出說法如下：

甲：圖案中灰色區域面積和未塗色區域面積一樣大。

乙：圖案中灰色區域和未塗色區域面積的比值為 $\frac{7}{9}$ 。

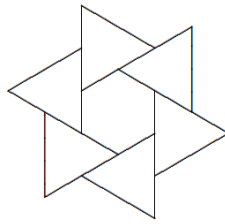
丙：能畫出此圖案的正方形紙張，對角線至少為 $4\sqrt{2}$ 單位長。

美美的說法，哪些是正確的？

- (A) 只有甲 (B) 只有乙 (C) 只有甲和丙 (D) 只有乙和丙

2. 如圖(二)。六個正三角形圍繞，中間形成一個正六邊形。若正三角形邊長與正六邊形邊長的比為 2:1。請問：正六邊形的面積與六個正三角形面積總和的比值為何？

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$



圖(二)

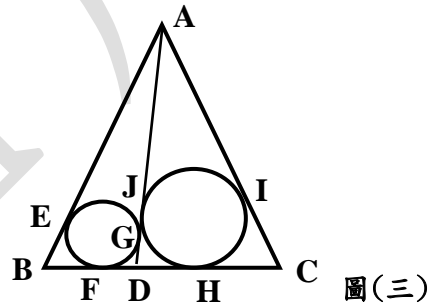
3. n 為任意正奇數，若 2^k 可整除 $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ ，求滿足上述條件的最大正整數 k 的值為何？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

4. 如圖(三) $\triangle ABC$ 為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，D 點在 \overline{BC} 上且 $\overline{BD} = 15$ ， $\overline{CD} = 21$ 。

圓 O_1 與圓 O_2 分別為 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的內切圓， E, F, G, H, I, J 點分別為切點。試求： \overline{GJ} 的長度為何？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



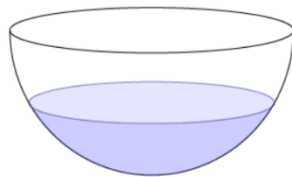
圖(三)

5. $n \in \mathbb{N}$ ， $f(n+3) = \frac{f(n)+1}{f(n)-1}$ 。若 $f(11) = 11$ ，求 $f(2027)$ 之值為何？

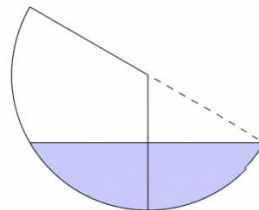
- (A) $-\frac{1}{11}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) 11

6. 如圖(四)。庭園裡有一個半球體的水缸，平日水缸都盛有一半深度的水。為了布置庭園裝置藝術，大明希望能讓此水缸傾斜(如圖五)，但不讓水缸裡的水漏出來。請問：水缸與水平線所夾的最大傾斜角為何？

- (A) $22\frac{1}{2}^\circ$
 (B) 30°
 (C) 45°
 (D) 60°



圖(四)



圖(五)

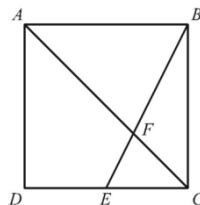
7. 試求方程式 $x + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}} - 1 = 0$ 實數解的個數有幾個？

- (A)4 個 (B)2 個 (C)1 個 (D)沒有實數解

8. 如圖(六)。正方形 ABCD 中，E 點為 \overline{CD} 的中點， \overline{BE} 與 \overline{AC} 相交於 F 點。

若四邊形 AFED 的面積為 45，請問：正方形 ABCD 的面積為何？

- (A)100 (B)108 (C)135 (D)144



圖(六)

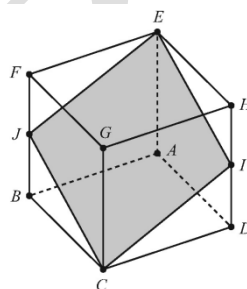
9. 大家來玩「挑三點，圍成形」。王老師請小明從正八邊形中隨機選取三個頂點，並將三個頂點連接形成一個三角形。請問：小明畫出的三角形至少有一條邊也是正八邊形的邊之機率是多少？

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{11}{14}$ (D) $\frac{6}{7}$

10. 如圖(七)。正方體 ABCDEFGH 中，頂點 C 與頂點 E 互為「相對的頂點」，I 點和 J 點分別為 \overline{DH} 與 \overline{BF} 的中點。

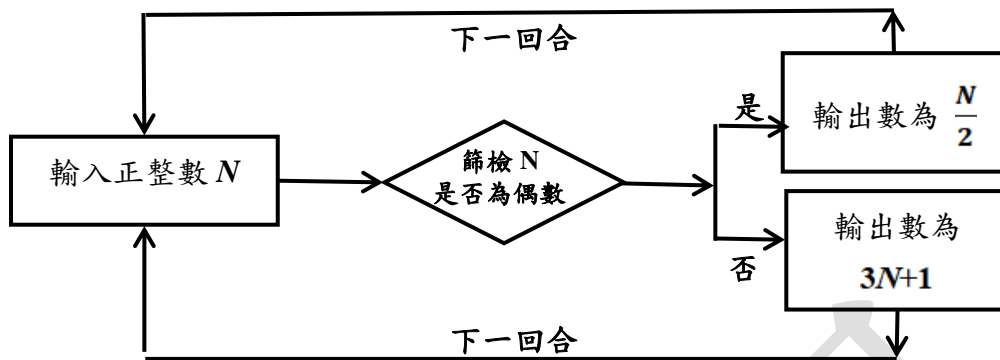
若四邊形 EJCI 的面積與正方體 ABCDEFGH 中任何一個表面的面積之比值為 R，試求 R^2 之值為何？

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{16}{9}$ (D) $\frac{6}{7}$



圖(七)

11. 有一部「數字篩檢計算器」的運作規則與流程如圖(八)所示：



圖(八)

例如：開始時，輸入的正整數為 $N=7$ ，「數字篩檢計算器」判定「7 不是偶數」，故，輸出的數為「 $3 \times 7 + 1 = 22$ 」。接著，再將輸出數「22」輸入「數字篩檢計算器」（「將輸出數再次輸入計算器」重複執行六次），依序獲得的輸出數為【 $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26$ 】。

請問：滿足「輸入計算器後，重複執行六次，最終結果為 1」（也就是滿足 $N \rightarrow \blacktriangle \rightarrow \blacksquare \rightarrow \bigcirc \rightarrow \square \rightarrow \triangle \rightarrow 1$ ）條件的正整數 N ，其總和是多少？

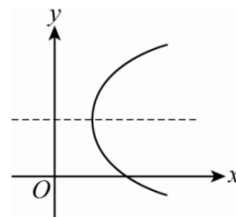
- (A)73 (B)74 (C)75 (D)83

12. 若 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 7 = b$ 。試求 $\log_{42} 28$ 之值為何？

- (A) $\frac{2+ab}{1+a+ab}$ (B) $\frac{2+ab}{1+b+ab}$ (C) $\frac{2a+b}{1+a+b}$ (D) $\frac{a+2b}{1+a+b}$

13. 如圖(九)。設 $x=ay^2+by+c$ 的圖形如下。則下列敘述何者正確？

- (A) $a < 0$ (B) $b < 0$
 (C) $c < 0$ (D) $b^2 - 4ac > 0$



圖(九)

14. 小明將正奇數依下列方法分群：

- | | | | | |
|-------|--------|------------|------------------|-----|
| (1) | (3, 5) | (7, 9, 11) | (13, 15, 17, 19) | ... |
| 第 1 群 | 第 2 群 | 第 3 群 | 第 4 群 | ... |

請問：第 n 群（有 n 個正奇數）的首項為何？

- (A) $2n + 1$ (B) $2n + 3$ (C) $n^2 - n + 1$ (D) $n^2 + n + 1$

15. 台台銀行規定客戶須從阿拉伯數字 0~9 之中，選擇 4 個阿拉伯數字，設定成為自己持有的提款卡密碼。如果客戶在提款機輸入的密碼錯誤達三次時，提款機就會沒收此張提款卡。有一天，奇奇利用提款機提款時，他突然忘記自己設定的正確密碼，但只記得密碼是由 1, 3, 5, 7 四個數字排列而成。於是，奇奇決定嘗試輸入不同的密碼。假設奇奇第一次就猜對的機率為 p ；第三次才猜對的機率為 q ；提款卡被沒收的機率為 r 。對此，五位同學提出敘述如下：

甲生： $p < q$ 乙生： $p = q$ 丙生： $p < r$

丁生： $q < r$ 戊生： $p + q + r = 1$

請問：誰的說法正確？

- (A) 只有甲、丙和丁 (B) 只有甲、丙、丁和戊
(C) 只有乙、丙和丁 (D) 只有乙、丙、丁和戊

16. 若 a 和 b 皆為有理數， c 和 d 皆為無理數。四位學生提出說法如下：

甲說： $a + c$ 必為無理數。

乙說： $c + d$ 必為無理數。

丙說： $a \times c$ 以及 $c \times d$ 皆為無理數。

丁說：若 $a + c = b + d$ ，則 $a = b$ ， $c = d$ 。

請問：那些人的敘述正確？

- (A) 只有甲 (B) 只有乙和丙 (C) 只有丙和丁 (D) 甲、乙，丙和丁皆正確

17. 坐標空間中有三條直線 L_1, L_2, L_3 以及二個平面 E_1, E_2 ，其方程式如下：

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}, \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}, \quad L_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

$$E_1: x + 6y + 8z = 0, \quad E_2: x - 3y + 2z = 1$$

關於這些平面與直線的關係，四位學生提出說法如下：

甲說：直線 L_1 與直線 L_2 相交。

乙說：直線 L_2 與直線 L_3 平行且直線 L_2 在平面 E_2 上。

丙說：直線 L_1 與平面 E_1 平行。

丁說：點 $P(0, 3, 4)$ 在直線 L_2 上，點 $Q(0, 0, 0)$ 在直線 L_3 上， \overline{PQ} 的長度即為直線 L_2 與直線 L_3 的最短距離。

請問：誰的說法正確？

- (A) 只有甲 (B) 只有丁 (C) 只有甲和乙 (D) 只有丙和丁

18. 下列何者不是 9 之倍數？

- (A) 986^3+814^3 (B) $645 \cdot 7329$ (C) 3^{101} (D) $10^{90}+1$

19. 若 x^2-x+a 能整除 $x^{13}+x+90$ ，則整數 $a=?$

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

20. 設 $a=5^{89}$ ， $b=8^{59}$ ， $c=9^{58}$ ，則 a 、 b 、 c 三數中最大數為何？

- (A) $a=5^{89}$ (B) $b=8^{59}$ (C) $c=9^{58}$ (D) 三者相等

21. a 、 b 、 c 為正整數，滿足 $abc=2310$ 之集合 $\{a, b, c\}$ 共有多少個？

- (A) 25 (B) 31 (C) 36 (D) 41

22. 若 a, b, c, d 表 $0 \sim 9$ 的整數，且 $3^{20}=a48678440b$ ， $2^{20}=10485cd$ ，則 $a+b+c+d$ 的值為何？

- (A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21

23. 若 $\sqrt{684} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ ，其中 m, n 是自然數，則 $m+n$ 不可能為下列何值？

- (A) 494 (B) 380 (C) 342 (D) 114

24. x, y 為任意整數，則 $\left| \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{2008}{5} \right|$ 的最小值為何？

- (A) 0 (B) $1/120$ (C) $1/60$ (D) $1/30$

25. 已知梯形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，若 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{AD} = 2\sqrt{86}$ ，求 $\overline{BD} = ?$

- (A) $6\sqrt{7}$ (B) $7\sqrt{7}$ (C) $8\sqrt{7}$ (D) $9\sqrt{7}$

26. 已知關於 x 的一元二次方程式 $x^2 - 2x - a^2 - a = 0$ ($a > 0$)。若對於 $a = 1, 2, \dots, 100$ ，相應方程式的兩根分別為 α_1 與 β_1 ， α_2 與 β_2 ， \dots ， α_{100} 與 β_{100} ，則 $1/\alpha_1 + 1/\beta_1 + 1/\alpha_2 + 1/\beta_2 + \dots + 1/\alpha_{100} + 1/\beta_{100}$ 的值為何？
 (A) $-200/101$ (B) $-100/101$ (C) $-202/101$ (D) $200/101$
27. 已知 a, b, c 三個質數，滿足 $a+b+c+abc = 149$ ，則 $|a-b| + |b-c| + |c-a| = ?$
 (A) 27 (B) 29 (C) 54 (D) 58
28. 已知 a, b, c 均為正整數，且 $41a+42b+43c=380$ ，試求 $a+b+c$ 的值為何？
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
29. 已知數列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，令 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ，對於任意 $n \geq 2$ ， $3S_n - 4$ ， a_n ， $2 - \frac{3}{2}S_{n-1}$ 總成等差數列，求 $a_{13} = ?$
 (A) $-1/4096$ (B) $1/4096$ (C) $-1/2048$ (D) $1/2048$
30. 設 $a^{1/2} - a^{-1/2} = 3$ ，求 $\frac{a^2 + a^{-2} - 1}{a^{3/2} - a^{-3/2} + 4}$ 的值為何？
 (A) $59/40$ (B) $59/20$ (C) $59/10$ (D) $20/59$
31. 考慮從 1 到 122 的連續正整數的四次方和，即 $a = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + 122^4$ ，則 a 的個位數字為何？
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7
32. 已知一個二位數正好是它的數字和的 n 倍，其中 $n > 1$ 為正整數，那麼將此二位數的十位數字與個位數字互換後所成的新的二位數正好是其數字和的幾倍？
 (A) $n+1$ (B) $9-n$ (C) $10-n$ (D) $11-n$

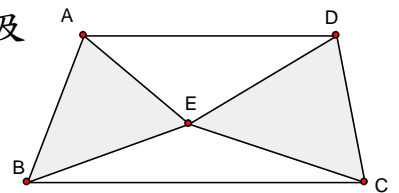
33. 設 n 為正整數，則滿足 $\frac{n+17}{n-7}$ 為整數的所有可能 n 值的個數為下列何者？
 (A) 8 (B) 11 (C) 13 (D) 16
34. 試問 $17^{103} + 3$ 的個位數字是多少？
 (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6
35. 化簡 $\left(\sqrt{3} - \sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{b}{a}$ ，其中 a, b 為互質的正整數，則 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 之值為下列何者？
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
36. 下列哪一個選項是正確？
 (A) $5^{56} < 31^{28} < 17^{35} < 10^{51}$ (B) $5^{56} < 17^{35} < 10^{51} < 31^{28}$
 (C) $5^{56} < 10^{51} < 17^{35} < 31^{28}$ (D) $17^{35} < 5^{56} < 10^{51} < 31^{28}$
37. 已知正整數 n 為三位數，如果 n 與其三個數字之和為 313，則滿足這樣條件的所有可能 n 值共有多少個？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
38. 如果實數 a, b 為一元二次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的二個解，且 $a > b$ ，則 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ 之值為下列者？
 (A) $-3\sqrt{5}$ (B) $-\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $3\sqrt{5}$
39. 在直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，令 $x = \frac{a}{c}$ 且 $y = \frac{b}{c}$ 且滿足 $13xy = 15(x+y) - 15$ ，則 $x+y$ 之值為下列何者？
 (A) $\frac{15}{13}$ (B) $\frac{17}{13}$ (C) $\frac{20}{13}$ (D) $\frac{30}{13}$

40. 已知一等差數列 $\{a_n\}$ ，它的第5項 $a_5 = 88$ ，第8項為 $a_8 = 79$ ，則使 a_n 為負數的最小正整數 n 值為下列何者？
 (A)32 (B)33 (C)34 (D)35

41. 已知 a, b 為實數，且 $a \neq 0$ ，如果一多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $q(x)$ ，餘式為 r ，試問下列何者正確的？

- (A) $f(x)$ 除以 $x+\frac{b}{a}$ ，得商 $q(x)$ ，餘式為 r
 (B) $xf(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $xq(x)-\frac{r}{a}$ ，餘式為 $\frac{br}{a}$
 (C) $xf(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $xq(x)+\frac{r}{a}$ ，餘式為 $-\frac{br}{a}$
 (D) $x^2f(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $x^2q(x)+\frac{r}{a}x-\frac{br}{a^2}$ ，餘式為 $-\frac{b^2r}{a^2}$

42. 如圖(十)，梯形 $ABCD$ 中， E 為內部的一點，使得 $\triangle AED$ 及 $\triangle BEC$ 的面積分別為9和8平方公分。如果 $\overline{AD} = \frac{3}{4}\overline{BC}$ ，則圖中陰影部份的面積為下列何者？



圖(十)

- (A)16 (B)17 (C)18 (D)19
43. $\triangle ABC$ 中， $\tan \angle BAC = \frac{22}{7}$ ，過頂點 A 作 \overline{BC} 邊上的高交 \overline{BC} 於 D 點，使得 $\overline{BD} = 3, \overline{DC} = 17$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？
 (A)110 (B)120 (C)170 (D)220
44. 設 n 為正整數，如果 $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ 為一質數，則滿足這樣條件的所有可能 n 值共有多少個值？
 (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

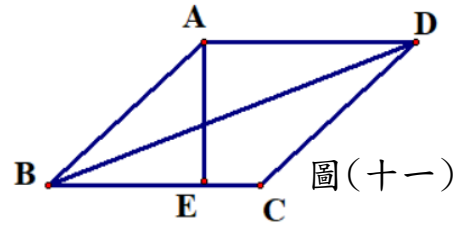
45. 設 a, b 為正整數，如果 $b^2 + 3a^2b^2 = 30a^2 + 517$ ，則 $a+b$ 之值為下列何者？

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13

46. 已知菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABD$ 為一銳角，過 A 點作 \overline{AE} 垂直 \overline{BC} ，交 \overline{BC} 於 E 點，如圖(十一)所示。

如果 $\overline{BE} = 3, \overline{CE} = 2$ ，則 \overline{BD} 之值為下列何者？

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{5}$ (D) 9

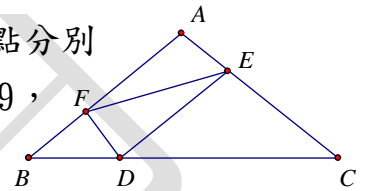


圖(十一)

47. 如圖(十二)所示，已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 D, E, F 三點分別在 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 三邊上，使得 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，又 $\triangle BDF$ 之面積為 9， $\triangle AFE$ 之面積為 15， $\triangle DCE$ 之面積為 32，則 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$

面積之比值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{7}$



圖(十二)

48. 已知 a, b, c, d 分別表示 1 至 9 中的四個不同數字，如果兩個二位數 $10a+d$ 與 $10b+d$ 的乘積恰好是一個三位數 $100c+10c+c$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列何者？

- (A) 21 (B) 23 (C) 25 (D) 27

49. 已知一個三角形的三邊長分別為 $\sqrt{29}, \sqrt{34}, \sqrt{73}$ ，則此三角形的面積為下列何者？

- (A) 14 (B) $14\frac{1}{2}$ (C) 15 (D) $15\frac{1}{2}$

50. 已知一袋子裡有 11 顆球，分別編上號碼 1、2、3、 \dots 、10、11，今同時隨機取出 6 顆球，每顆被取出的機會相等，若取出的 6 顆球之號碼和為奇數，則其機率為下列何者？

- (A) $\frac{115}{231}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{118}{231}$ (D) $\frac{6}{11}$

澎湖縣 115 學年度國民中學聯合甄選正式教師
數學科目試題答案

選擇題答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	A	D	B	C	B	B	B

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	B	C	C	A	C	D	D	A

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	D	C	C	A	C	C	A	B

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	C	D	A	A	B	A	B	D

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	A	B	B	C	B	A	D	C