

# 國立新竹高級中學 115 學年度第三次教師甄試 數學試題卷

## 一、填充題(每題 6 分，共 72 分。)

註：請將答案化簡為最簡分式或最簡根式。

1、設  $x, y, z$  皆為實數，若  $2x + y + z = 3$ ，則行列式  $T = \begin{vmatrix} x^2 + 2 & xy & xz \\ xy & y^2 + 2 & yz \\ xz & yz & z^2 + 2 \end{vmatrix}$  的最小值為\_\_\_\_\_。

2、試求定積分  $\int_{-2}^2 \left| \sqrt{4-x^2} - x \right| dx =$ \_\_\_\_\_。

3、設  $\alpha$  為方程式  $x^3 + 3x^2 + 6x + 14 = 0$  的實根，且  $\beta$  為方程式  $x^3 + 9x^2 + 30x + 26 = 0$  的實根，則  $\alpha + \beta =$ \_\_\_\_\_。

4、有五種不同的禮物共 10 件，每種各有相同的 2 件，全部均分給甲、乙、丙、丁、戊 5 人，每人可得 2 件不同種的禮物，且任意 2 人的禮物不能完全相同，則分法有\_\_\_\_\_種。

5、有甲、乙兩個大小相同的盒子，甲盒中有 5 個球，乙盒中有 6 個球，每次隨機選擇 1 個盒子，並從中取出 1 個球不放回，直到某個盒子中不再有球時結束，則結束時是甲盒中沒有球的機率為\_\_\_\_\_。

6、已知平行四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 4$  且  $\triangle ABD$  的外接圓半徑為 5，則對角線  $\overline{AC}$  長的最大值為\_\_\_\_\_。

7、坐標空間中，已知四點坐標  $O(0,0,0)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $B(3,3,0)$ 、 $C(1,-2,2)$ ，且  $P$  點滿足

$\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$ ，其中  $\alpha \geq 0$ ， $\beta \geq 0$ ， $\gamma \geq 0$  且  $1 \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3$ ，則所有  $P$  點形成的圖形體積為\_\_\_\_\_。

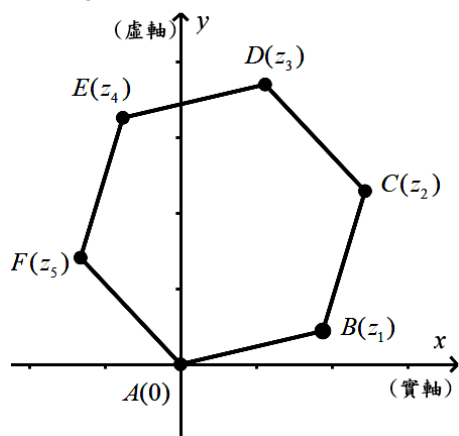
8、已知轉移矩陣  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & a_1 \\ a_2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ，鏡射矩陣  $B$  且  $B^3 = \begin{bmatrix} b_1 & \frac{4}{5} \\ b_2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ，旋轉矩陣  $C$  且  $C^6 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (其中  $C$

為以原點為中心，逆時針旋轉一銳角的旋轉矩陣)，若矩陣  $D = 10 \cdot A^7 \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則

$a + b + c + d =$ \_\_\_\_\_。

9、已知  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\overline{AC} = 2$ ， $M$  是  $\overline{AB}$  的中點，若將  $\triangle ACM$  的點  $A$  沿著摺線  $\overline{CM}$  折起，使得  $A, B$  兩點間的距離為  $2\sqrt{2}$ ，則此時四面體  $A-BCM$  的體積為\_\_\_\_\_。

10、如圖所示，已知複數平面上的相異六個點  $A(0), B(z_1), C(z_2), D(z_3), E(z_4), F(z_5)$ ，且將  $ABCDEF$  依逆時針方向可連成一個正六邊形。設  $\frac{z_5 - z_1}{z_2 - z_1}$  的主幅角為  $\alpha$ ， $\frac{z_4 - z_3}{z_1 - z_2}$  的主幅角為  $\beta$  且  $\frac{z_5 - z_3}{z_3 - z_1}$  的主幅角為  $\gamma$ ，則  $\alpha + \beta + \gamma =$ \_\_\_\_\_。



11、坐標平面上，設圓  $C_1$  是以原點  $O$  為圓心且半徑為 10 的圓，且點  $A(p, q)$  滿足  $p^2 + q^2 = 64$ 。若有另一圓  $C_2$  通過  $A$  點且與圓  $C_1$  相切，令圓  $C_2$  的圓心為  $B(r, s)$ ，則  $ps - qr$  的最大值為\_\_\_\_\_。

12、設  $n$  為正整數，若  $x^n$  除以  $(x-1)(x-2)(x-4)$  的餘式為  $R(x)$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(0)}{R(-1)} =$ \_\_\_\_\_。

## 二、計算題(請寫出演算過程或理由，共 28 分。)

1、若實數  $x, y, z$  滿足  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ ，則  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值為何？(9 分)

2、設  $a$  為實數，若常數  $a$  使得關於  $x$  的方程式  $\log(x^2 + 20x) - \log(8x - 6a - 3) = 0$  有唯一解，則  $a$  的取值範圍為何？(9 分)

3、已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 2$ ， $\angle C = 2\angle A$ ，則  $\triangle ABC$  面積的最大值為何？(10 分)