

臺中市立豐原高級中等學校 115 學年度第三次教師甄試數學科筆試試題

一、填充題：14 題，每題 5 分(共 70 分)

1、曲線 $\Omega = \{(x, y) \mid \log(y-6) + \log(y-4) - \log(x^2+8) = 0\}$ 及圓 $C = \{(x, y) \mid x^2 + (y-3)^2 = 4\}$ ，已知 $P(x, y)$ 為 Ω 上的動點， Q 為 C 上的動點，則 $\overline{PQ}$ 最短距離為_____。

2、直角坐標平面上的線性變換 f 滿足下列條件：

(1) 存在兩個非零且不平行的向量 $\vec{u}$ 及 $\vec{v}$ ，使得 $(f \circ f)(\vec{u}) = f(\vec{v})$ 及 $(f \circ f)(\vec{v}) = f(\vec{u})$ 。

(2) f 將 $(1, 1)$ 映射到 $(1, 0)$ 。

試求所有 f 可能對應的矩陣之和為_____。

3、令 $a = \frac{10^{15000}}{10^{100} + 3}$ ，求 a 的整數部分為_____。(數太大可以用指數表示)。

4、黑箱中有 7 枚均勻的硬幣，其中 1 枚兩面都是人頭，1 枚兩面都是字，其餘 5 枚一面是人頭一面是字。將兩手同時伸入箱中分別握住 1 枚硬幣，取出後先打開右手，發現該枚硬幣朝上的一面是人頭，則左手攤開後該枚硬幣朝上的一面也是人頭的機率為_____。

5、空間中一個三角柱，包含五個面的平面方程式分別為 $x+y+z=5$ 、 $x+y+z=11$ 、 $x-2y+z=3$ 、 $x-z=5$ 及 $x-y=2$ ，請求此三角柱的體積為_____。

6、正 $\triangle ABC$ 邊長為 3， D 為 $\overline{AB}$ 上一動點，做 A 、 C 、 D 的外接圓 Γ_1 交 $\overline{BC}$ 於 E ，做 B 、 D 、 E 的外接圓 Γ_2 ，則兩圓面積和最小值為_____。

7、函數 $f(x)$ 之定義域為自然數，假設 $f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{當 } n \geq 1000 \\ f(f(n+7)), & \text{當 } n < 1000 \end{cases}$ ，求 $f(90) =$ _____。

8、將 4 個相同的球放入 10 個排成一列的相異箱子中。規定任意兩個球不可放在相鄰的箱子，且第一個箱子與最後一個箱子不可同時放球（即首尾不相鄰），則共有_____種不同的放法。

9、設 n 為正整數且 $n \leq 2026$ 。若 $n^2 + 8n - 1$ 能被 13 整除，則滿足條件的 n 共有_____個。

10、設 $f(x) = x^{2026} + ax^{100} + b$ 為實係數多項式。若 $f(x)$ 能被 $x^2 - x + 1$ 整除，則數對 $(a, b) =$ _____。

11、設 $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$ ，其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示小於或等於 x 的最大整數。求級數和 $\sum_{n=1}^{2026} f(n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12、設 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ 為 1 的七次方根且 $\omega \neq 1$ 。求 $\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{1}{1+\omega^3} + \frac{1}{1+\omega^4} + \frac{1}{1+\omega^5} + \frac{1}{1+\omega^6} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13、設實函數 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (其中 $x > 1$)，則 $f(x)$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14、設區域 R 是由曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 與 x 軸所圍成的封閉區域。若將區域 R 繞 y 軸旋轉一週，則所得旋轉體的體積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算題：6 題，每題 5 分(共 30 分)

1、假設 $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{R}^+, i=1, 2, \dots, n$ ，同時 $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n r_i$ ，請證明： $\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{p_i + q_i + r_i} \geq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n p_i$ 。

2、 $a_1, \dots, a_n$ 為方程式 $x^n + x + 1 = 0$ 的 n 個根，請證明： $\sum_{i=1}^n (a_i^{n-1} - a_i^n) = 1$

3、 $f(z)$ 為一 n 次複數係數多項式且符合下列條件：

(1) $z^2 - 1$ 可以整除 $f(z)$

(2) $f(z) = 0$ 所有根的乘積為 1

試證明 $f(z)$ 可以整除 $f \circ f \circ f(z)$ 。

4、設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1$ ，且對所有正整數 n ，滿足遞迴關係式： $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

試利用數學歸納法證明：對所有正整數 n ， $a_n \geq \sqrt{2n-1}$ 恆成立。

5、設 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，其外接圓圓心為 O ，垂心為 H 。令 M 為 $\overline{BC}$ 邊的中點。延長直徑 $\overline{AO}$ 交外接圓於點 E 。

證明：四邊形 $HBEC$ 為平行四邊形。

6、證明：對所有大於或等於 2 的正整數 n ，不等式 $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ 恆成立。